ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

15

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1891.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 15. — 1891. — TOME 15.

ERRATA.

Page 54, ligne 10, au lieu de *ligne* lisez *diagonale*.

» 54, » 7, au lieu de *invariants* lisez *déterminants*.

» 63, » 4, lisez:

$$Y(x, \rho' + p_1), Y(x, \rho^2 + p_2), \ldots, Y(x, \rho^n + p_n).$$

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE

DES INTÉGRALES ET DES INVARIANTS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE ET HOMOGÈNE

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

À STOCKHOLM.

Introduction.

Soit l'équation différentielle linéaire

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

dans laquelle nous supposons que $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ désignent des fonctions analytiques uniformes de la variable x, telles, que dans chaque portion finie du plan des x il n'existe qu'un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de ces fonctions, ce qui revient à dire que

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty$$

si le nombre des points singuliers est infini.

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales, soit x_0 un point quelconque, qui n'est point singulier pour aucune des fonctions $p_1(x)$, $\ldots, p_n(x)$ et soit enfin L une ligne fermée, continue, passant par le point x_0. Soit de plus $\mathfrak{P}_1(x-x_0), \ldots, \mathfrak{P}_n(x-x_0)$ un système d'éléments des intégrales $y_1, \ldots, y_n$. Si, en partant de ces éléments on fait décrire à x le contour fermée L, les éléments $\mathfrak{P}_1(x-x_0), \ldots, \mathfrak{P}_n(x-x_0)$ éprouvent une substitution linéaire, c'est à dire on obtient, en revenant au point x_0, un nouveau système d'éléments $\overline{\mathfrak{P}}_1(x-x_0), \ldots, \overline{\mathfrak{P}}_n(x-x_0)$, qui sont unis aux éléments primitifs par des relations de la forme

$$(1) \qquad \overline{\mathfrak{P}}_m(x-x_0) = \alpha_{m1}\mathfrak{P}_1(x-x_0) + \ldots + \alpha_{mn}\mathfrak{P}_n(x-x_0), \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

dans lesquelles $\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}$ désignent des constantes par rapport à x. Les constantes $\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}$ restent les mêmes, si l'on transforme d'une manière continue, mais sans jamais passer par un point singulier, la ligne L dans une autre ligne fermée, passant aussi par le point x_0. On sait de plus, que si l'on forme la fonction entière et rationnelle du $n^{\text{ème}}$ degré d'une nouvelle quantité ω

$$2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{22} & \alpha_{22} - \omega & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

les coefficients de chaque puissance de ω dans cette fonction sont des *invariants*, c'est à dire non seulement qu'ils restent les mêmes pour chaque substitution donnée ou qu'ils ne varient pas si l'on transforme d'une manière continue le contour L dans un autre contour fermé, sans passer par un point singulier, mais de même qu'ils sont indépendants du changement de substitution qui a lieu en prenant pour point de départ un autre point x_0 et un autre système fondamental d'intégrales $y_1, \ldots, y_n$.[1]

On peut montrer que le problème de représenter analytiquement les invariants des substitutions qui correspondent à une ligne fermée L quelconque peut toujours être reduit à celui de représenter les invariants des substitutions correspondant à une autre ligne fermée, ne se coupant pas elle-même et située entièrement entre deux cercles dont le centre est à l'origine des coordonnées, dont chacun passe par un point singulier et qui enferment un anneau circulaire C, lequel ne contient pas de point singulier à son intérieur.

MM. Hamburger[2] et Poincaré[3] ont été les premiers à traiter ce

[1] Fuchs. *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.* § 3. Journal für Mathematik. Bd. 66.

[2] Hamburger. *Über ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen einer complexen Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Punkte.* Journal für Mathematik. Bd. 83.

[3] Poincaré. *Sur les groupes des équations différentielles linéaires,* page 211. Ce journal, Tome 4.

dernier problème de représenter analytiquement les invariants qui correspondent à une ligne L enfermée dans un anneau circulaire, C.

La méthode de M. HAMBURGER ne peut être appliquée que si les rayons des deux cercles limites de l'anneau circulaire considéré satisfont à une certaine inégalité: de plus dans les séries au moyen desquelles M. HAMBURGER exprime les invariants, entre la quantité x_0, quoique les invariants eux-mêmes en soient indépendants.[1]

M. POINCARÉ s'est affranchi de la supposition comportant une restriction à la généralité des résultats obtenus par M. HAMBURGER. Mais en examinant de plus près les expressions obtenues par M. POINCARÉ on voit qu'elles dependent, non seulement comme les séries de M. HAMBURGER, de la quantité arbitraire x_0, mais encore d'une autre quantité, qui est de même arbitraire dans certaines limites et dont les invariants sont indépendants aussi bien que de x_0. On obtient les expressions de M. POINCARÉ en donnant à ces deux quantités arbitraires certaines valeurs particulières.

M. FUCHS s'est occupé de ce problème[2] bien avant MM. HAMBURGER et POINCARÉ; mais son but paraît avoir été plutôt de montrer que pour chaque équation différentielle linéaire et homogène dont les coefficients sont des nombres donnés, il existe toujours certaines opérations, au moyen desquelles on peut calculer la valeur numérique des invariants, que de trouver des expressions qui établissent la dépendance des invariants d'une

---

[1] Je veux profiter de cette occasion pour faire ressortir la circonstance suivante, qui paraît ne pas avoir été remarquée jusqu'à présent: M. HAMBURGER dans le mémoire cité qui a paru en 1877, a trouvé dans les expressions qu'il donne pour les invariants toute une classe de séries, qui jouissent de la propriété de représenter des constantes différentes dans différentes portions du plan. L'importance de séries pareilles au point de vue de la théorie des fonctions ressort des mémoires suivants, qui ont paru postérieurement à celui de M. HAMBURGER:

WEIERSTRASS. *Zur Functionenlehre.* Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880.

HERMITE. *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Acta Societatis Scientiarum Fennicæ. T. 12. Helsingfors 1881. Journal für Mathematik. Bd. 91. Berlin 1881.

[2] FUCHS. *Über die Darstellung der Functionen complexer Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen.* Journal für Mathematik. Bd. 75. Berlin 1873.

équation différentielle linéaire de ses constantes au point de vue de la théorie des fonctions. De plus la méthode de M. Fuchs n'est applicable que sous une restriction importante.

Dans son mémoire célèbre dans le tome 66 du journal de Borchardt,[1] M. Fuchs a montré, qu'on peut toujours choisir un système fondamental d'intégrales $y_1, \ldots, y_n$ de telle manière que toutes les valeurs de y_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ à l'intérieur de l'anneau circulaire C peuvent être exprimées par une expression analytique de la forme suivante:

$$(3) \quad x^{\mu_m}\{f_{m0}(x) + f_{m1}(x)\log x + f_{m2}(x)(\log x)^2 + \ldots + f_{m\nu_m}(x)(\log x)^{\nu_m}\}.$$

Dans cette expression les μ_m désignent des constantes par rapport à x et $f_{m0}(x), f_{m1}(x), \ldots, f_{m\nu_m}(x)$ sont des séries procédant d'après les puissances entières positives et négatives de x. C'est seulement dans un cas très spécial que M. Fuchs a pu calculer les coefficients des différents termes de ces séries: dans celui où les séries ne contiennent les puissances négatives de x qu'en nombre fini. Mais dans le calcul des invariants il suppose connus les coefficients des séries $f_{m0}(x), \ldots, f_{m\nu_m}(x)$ toutes les fois qu'on prend comme l'origine des coordonnées un point singulier de l'équation différentielle et que le cercle limite intérieur de C se réduit à ce point. La méthode ne peut donc être appliquée même au calcul numérique des invariants que dans le cas où toutes les intégrales de l'équation différentielle ont la forme *régulière* dans l'entourage de *chaque* point singulier situé dans une portion finie du plan.

En démontrant qu'il existe toujours un système fondamental d'intégrales y_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ tel que toutes les valeurs de y_m correspondant à un point à l'intérieur de l'anneau circulaire C peuvent être représentées par des expressions de la forme (3), M. Fuchs n'a point, comme nous l'avons déjà fait remarquer, résolu le problème de former réellement ces expressions. Pour le cas où le cercle intérieur limitant C se réduit à un seul point, la solution de ce problème a été donnée par M. Picard.[2] Pour le cas géneral, où le cercle limite intérieur de l'anneau circulaire C a un rayon quelconque, on en trouvera la solution complète dans le § 1 du présent mémoire.

---

[1] *Zur Theorie* etc.

[2] Comptes rendus, mars 1879.

Dans le § 2 je donne une expression des invariants, qui découle des séries de M. POINCARÉ, mais qui est libérée de la quantité arbitraire superflue x_0. Pourtant chaque terme de ces invariants contient encore une certaine quantité positive, arbitraire entre deux limites données, dont les invariants eux-mêmes sont absolument indépendants.

Dans le § 3 je développe toute une classe d'expressions nouvelles, qui sont toutes affranchies de la quantité arbitraire x_0. En faisant la même restriction que M. HAMBURGER on retrouve parmi ces expressions celle donnée par lui, seulement présentée sous une forme qui ne contient plus la quantité arbitraire x_0.

Supposons que les coefficients de l'équation différentielle proposée soient des fonctions rationnelles de x, de manière que l'on puisse l'écrire sous la forme

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{P_n(x)}{P_0(x)}y = 0$$

où

$$P_0(x) = (x - a_1)^{q_1}, \ldots, (x - a_p)^{q_p},$$

$$P_\nu(x) = A_{\nu 1} + A_{\nu 2}x + \ldots + A_{\nu p_\nu}x^{p_\nu}, \qquad {\scriptstyle (\nu=1,\ldots,n)}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p . A_{\nu q}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n, q = 0, 1, \ldots, p_\nu)$ désignant des constantes données et $q_1, q_2, \ldots, q_p$ étant des nombres entiers positifs.

Les invariants qui correspondent à une ligne L quelconque, peuvent, du moins dans le cas où l'équation différentielle est du 2[me] ordre, être exprimés algébriquement au moyen des invariants correspondant à un certain nombre de substitutions, que l'on obtient lorsque l'on suppose que le contour fermé L ne circonscrit qu'un seul ou tout au plus deux points singuliers.[1] Dans le § 4 on ramène l'étude de ces derniers invariants à

[1] Voir POINCARÉ, *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique*, Journal des math. pures et appliquées, 4[ème] série, tome 3. Quand le mémoire présent était déjà terminé l'auteur a eu connaissance d'une thèse de M. VOGT (*Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre.* Paris 1889) dans laquelle ce théorème de M. POINCARÉ se trouve exposé en détail. On y trouve aussi des expressions analytiques pour les invariants d'une équation différentielle de 2[me] ordre dont je me propose à un autre endroit de faire ressortir les rapports avec les expressions déjà connues.

celle des invariants déjà traités dans les §§ 2 et 3 et il se trouve que ces derniers invariants peuvent être représentés par des expressions analytiques absolument de même forme que celles trouvées dans les paragraphes cités.

§ 1. *Sur la représentation analytique des intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène dans l'intérieur d'un anneau circulaire qui n'embrasse aucun point singulier.*

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x) y = 0 \tag{A}$$

en faisant par rapport aux coefficients $p_1(x) \ldots p_n(x)$ les mêmes suppositions que dans l'introduction, c'est à dire qu'ils sont des fonctions analytiques uniformes de la variable indépendante x n'ayant dans chaque domaine fini de cette variable qu'un nombre fini de points singuliers. Désignons par C l'intérieur d'un anneau circulaire, dont les deux cercles limites ont l'origine pour centre et passent par des points singuliers de l'équation différentielle (A), mais de manière qu'aucun point singulier ne soit contenu dans C même.

Soit y une intégrale de l'équation différentielle A et posons

$$x = \rho e^{\vartheta i}, \qquad |x| = \rho. \tag{1}$$

Pour une valeur donnée de x à l'intérieur de C la valeur correspondante de y n'est point en général définie d'une manière univoque, car cette valeur n'est pas en général fonction périodique de ϑ. Mais si nous fixons d'une manière arbitraire qu'un élément fonctionnel donné de l'intégrale y doit correspondre à une paire de valeurs données ρ_0, ϑ_0, il n'y aura plus rien d'indéterminé, et à chaque paire de valeurs données ρ, ϑ à l'intérieur de C ne correspondra qu'une seule valeur de y.

Soit x_0 un point quelconque à l'intérieur de C. Menons de l'origine à x_0 une ligne droite et prenons sur cette ligne deux points x_1 et x_2, tous les deux appartenant à C et tels que l'on ait

$$\begin{cases} |x_1| < |x_2|, \\ x_0 = \sqrt{x_1 x_2}. \end{cases} \tag{2}$$

On a

$$(3) \qquad \begin{cases} x_2 = x_0 e^h, \\ x_1 = x_0 e^{-h}, \end{cases}$$

h étant une quantité positive

$$(4) \qquad h = \frac{1}{2} \log \frac{x_2}{x_1}.$$

Désignons par X l'anneau circulaire, limité par deux cercles dont le centre commun est à l'origine et dont les rayons sont égaux respectivement à $|x_1|$ et à $|x_2|$.

Si l'on pose alors

$$(5) \qquad x = x_0 e^z$$

l'anneau circulaire X dans le plan de x sera représenté dans le plan de z par une bande K, située entre deux lignes droites parallèles, formant un angle droit avec l'axe réel et coupant cet axe respectivement aux distances h et $-h$ de l'origine. A chaque point z à l'intérieur ou à la limite de K correspond une, et seulement une, paire de valeurs ρ, ϑ, déterminant un point x à l'intérieur ou à la limite de X. Et réciproquement à chaque paire de valeurs ρ, ϑ, définissant un point à l'intérieur ou à la limite de x, correspond un seul point z à l'intérieur ou à la limite de K.

Introduisons maintenant une nouvelle variable t, définie par l'équation

$$(6) \qquad t = \frac{e^{i\alpha z} - 1}{e^{i\alpha z} + 1}$$

où la constante α est définie par l'équation

$$(6') \qquad \alpha h = \frac{\pi}{2}.$$

A la bande K dans le plan de x correspond dans le plan de t un cercle H qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Au point infiniment éloigné où les deux lignes parallèles, qui limitent la bande K, se coupent au-dessus de l'axe des x, correspond le point $t = -1$, et au

point d'intersection de ces deux lignes au-dessous de l'axe des x correspond le point $t = +1$. Au point $z = 0$ correspond le point $t = 0$.[1]

En éliminant z des équations (5) et (6) on trouve

$$t = \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}, \tag{7}$$

$$x = x_0\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}}. \tag{7'}$$

A l'aide de cette relation, l'anneau circulaire X dans le plan de x est représenté conformément sur le cercle H dans le plan de t, de manière qu'à chaque paire de valeurs ρ, ϑ, définissant un point x à l'intérieur ou à la limite de X, ne correspond qu'un seul point z à l'intérieur ou à la limite de H, et réciproquement, à chaque point t à l'intérieur ou à la limite de H, à l'exception seulement des deux points $t = -1$, $t = +1$, ne correspond qu'une seule paire de valeurs ρ, ϑ, définissant un point à l'intérieur ou à la limite de X. A la paire de valeurs ρ_0, ϑ_0 définissant le point x_0, correspond le point $t = 0$.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction analytique, qui se comporte régulièrement partout à l'intérieur de X. Si l'on pose

$$f(x) = f\left(x_0\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}}\right) = F(t)$$

en fixant l'élément de $f(x)$ qui doit correspondre à ρ_0, ϑ_0 $(x_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0})$ $F(t)$ représentera une fonction régulière et uniforme à l'intérieur de H, et pourra par conséquent être développée en une série procédant suivant les puissances entières et positives de t, et convergente à l'intérieur de H.

---

[1] Cette substitution a été employé par M. POINCARÉ dans le problème des trois corps de la mécanique (Comptes rendus, 27 février 1882) ainsi que dans le calcul des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène (*Sur les groupes des équations linéaires.* Ce journal, T. 4, page 211). Cf. § 2 de ce mémoire.

On a par conséquent

$$f(x) = P\left[\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}\right]$$

où

$$P\left[\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}\right]$$

est une série entière qui pour chaque paire de valeurs ρ, ϑ définissant un point x à l'intérieur de X donne la valeur correspondante de $f(x)$. Les coefficients des différentes puissances de

$$\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}$$

dans cette expression peuvent être obtenus sans difficulté si l'on connaît les coefficients de l'élément fonctionnel de $f(x)$ qui correspond à ρ_0, ϑ_0 $(x = x_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0})$. Désignons en effet par $\mathfrak{P}(x - x_0)$ cet élément. On a alors dans le voisinage immédiat du point x_0 défini par ces valeurs ρ_0, ϑ_0

$$f(x) = \mathfrak{P}(x - x_0),$$

d'où il suit, pour le voisinage immédiat du point $t = 0$,

$$f(x) = \mathfrak{P}\left(x_0\left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}} - 1\right]\right).$$

Cette série étant uniformément convergente dans le voisinage immédiat de $t = 0$, on peut, d'après un théorème de M. Weierstrass,[1] la trans-

[1] voir page 73 dans *Zur Functionenlehre.* Abhandlungen aus der Functionenlehre. Berlin 1886.

former en une série procédant d'après les puissances entières positives de t et convergente dans le voisinage immédiat de $t = 0$. Cette série doit évidemment être identique à la série $P(t)$ dont nous venons de démontrer l'existence et qui est convergente pour toutes les valeurs de t telles que $|t| < 1$. Les coefficients de $P(t)$ peuvent donc être exprimés d'une manière simple à l'aide des coefficients de la série $\mathfrak{P}(x - x_0)$.

Dans le cas que nous considérons $f(x)$ est une intégrale de l'équation différentielle (A) et les coefficients de $\mathfrak{P}(x - x_0)$ sont donc donnés immédiatement en fonctions des constantes de cette équation différentielle. Ecrivons cette équation de la manière suivante:

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n(x)y = 0. \tag{8}$$

On a alors

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^{n+\nu}y}{dx^{n+\nu}} &= \frac{G_{n-1}^{(\nu+1)}(PP'\ldots P^{(\nu)})}{P_0^{\nu+1}}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{G_{n-2}^{(\nu+1)}(PP'\ldots P^{(\nu)})}{P_0^{\nu+1}}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots \\ &\ldots + \frac{G_1^{(\nu+1)}(PP'\ldots P^{(\nu)})}{P_0^{\nu+1}}\frac{dy}{dx} + \frac{G_0^{(\nu+1)}(PP'\ldots P^{(\nu)})}{P_0^{\nu+1}}y. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Les symboles G représentent des fonctions entières de dimension $(\nu + 1)$ des fonctions $P_0, P_1, \ldots, P_n$ et des dérivées de ces fonctions jusqu'à l'ordre ν. Il est à remarquer que les coefficients de G sont des nombres entiers.

Choisissons maintenant un système fondamental d'intégrales $y_1, \ldots, y_n$ de telle manière, qu'à la paire de valeurs ρ_0, ϑ_0 $(x_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0})$ correspondent

$$\frac{d^\nu y_m}{dx^\nu} = 0, \quad \nu \gtrless n - m, \; \nu \leqq n - 1; \quad \frac{d^{n-m}y_m}{dx^{n-m}} = 1. \tag{10}$$

On a alors dans le voisinage immédiat du point x_0 défini par la paire de valeurs ρ_0, ϑ_0

$$y_m = \frac{(x - x_0)^{n-m}}{\underline{|n - m}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_m^{n+\nu}(x_0)\frac{(x - x_0)^{n+\nu}}{\underline{|n + \nu}} \qquad (m=1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

les coefficients $\varphi_m^{n+\nu}(x_0)$ dans cette équation étant définis par l'équation (9), lorsque l'on pose dans cette dernière $x = x_0$ et qu'on prend en considération l'équation (10).

Si l'on pose dans l'équation (11)

$$x - x_0 = x_0 \left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}} - 1 \right]$$

et que l'on développe le côté droit de cette équation en séries $P_m(t)$ procédant d'après les puissances croissantes de t, et convergentes pour toutes les valeurs de t telles que $|t| < 1$, ces séries représenteront des intégrales de l'équation différentielle (A), si l'on introduit dans cette dernière la variable indépendante t au lieu de x.

Soit $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle transformée, défini par les conditions suivantes

$$(12) \qquad \frac{d^\nu v_m}{dt^\nu} = 0, \quad \nu \gtrless n - m, \nu \leqq n - 1; \qquad \frac{d^{n-m} v_m}{dt^{n-m}} = 1 \text{ pour } t = 0.$$

On aura alors

$$(13) \qquad v_m(t) = \frac{t^{n-m}}{\lfloor n-m} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_m^{n+\nu} \cdot \frac{t^{n+\nu}}{\lfloor n+\nu}; \qquad (m=1, 2, \ldots, n)$$

ainsi que

$$(14) \qquad P_m(t) = c_{1m} v_1(t) + c_{2m} v_2(t) + \ldots + c_{nm} v_n(t). \qquad (m=1, 2, \ldots, n)$$

Pour obtenir les constantes

$$\varphi_m^{n+\nu} \text{ et } c_{rm} \qquad \begin{pmatrix} m=1, 2, \ldots, n \\ r=1, 2, \ldots, n \\ \nu=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

nous introduisons les notations suivantes. On a

$$(15) \qquad \left| \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\frac{2h}{\pi i}} - 1 \right|^q = \left(\frac{4h}{\pi i} \cdot t\right)^q \{ (hq)_0 + (hq)_1 t + \ldots \}$$

où $(hq)_0 = 1$ et $(hq)_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ désigne une fonction entière rationnelle de $\frac{2h}{\pi i}$ et de q de degré ν par rapport à chacune de ces deux quantités et dont les coefficients sont des nombres rationnels. On a de plus $[0q]_\nu = 0$ aussi bien que $[h0]_\nu = 0$. Nous fixons de même que

$$(16) \qquad [hq]_\nu = 0 \text{ pour } \nu = -1, -2, -3, \ldots.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de t du côté droit et du côté gauche de l'équation (14) on obtient pour les constantes c_{rm} l'expression suivante

$$c_{rm} = \frac{\underline{|n-r}}{\underline{|n-m}} \cdot [h\,,\, n-m]_{m-r} \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{n-m} \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\ldots,n \\ r=1,2,\ldots,n \end{pmatrix} \tag{17}$$

d'où il suit

$$\left\{\begin{aligned} & c_{mm} = \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{n-m}, \qquad c_{rm} = 0 \text{ si } r > m, \\ & c_{nn} = 1, \qquad c_{rn} = 0, \text{ si } r < n. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Les coefficients ψ peuvent à leur tour être exprimés en fonctions des coefficients φ à l'aide des formules de récursion:

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-m}} [h\,,\, n-m]_{m-1} \frac{\psi_1^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} + \frac{\underline{|n-2}}{\underline{|n-m}} [h\,,\, n-m]_{m-2} \frac{\psi_2^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} + \ldots \\ & \qquad \ldots + \frac{\underline{|n-m}}{\underline{|n-m}} [h\,,\, n-m]_0 \frac{\psi_m^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} \\ & = \frac{[h\,,n-m]_{m+\nu}}{\underline{|n-m}} + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^m [h, n]_\nu \frac{\varphi_m^n(x_0)}{\underline{|n}} + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{m+1} [h, n+1]_{\nu-1} \frac{\varphi_m^{n+1}(x_0)}{\underline{|n+1}} + \ldots \\ & \qquad \ldots + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{m+\nu-1} [h, n+\nu-1]_1 \frac{\varphi_m^{n+\nu-1}(x_0)}{\underline{|n+\nu-1}} \\ & \qquad + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{m+\nu} [h\,,\, n+\nu]_0 \frac{\varphi_m^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}}, \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \tag{19}$$

lesquelles deviennent pour $m = n$:

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\psi_n^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} = \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^n [h\,,\, n]_\nu \frac{\varphi_n^n(x_0)}{\underline{|n}} + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{n+1} [h\,,\, n+1]_{\nu-1} \frac{\varphi_n^{n+1}(x_0)}{\underline{|n+1}} + \ldots \\ & \qquad \ldots + \left(\frac{4h}{\pi i} x_0\right)^{n+\nu} [h\,,\, n+\nu]_0 \frac{\varphi_n^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}}. \qquad (\nu=0,1,2,\ldots) \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Nous avons donc complètement résolu le problème que nous nous sommes proposé au commencement de ce paragraphe. Nous avons démontré en effet:

que les expressions du côté droit des équations

$$(21)\quad y_m(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda m}\left\{ \frac{1}{\lfloor n-\lambda} \left[\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1} \right]^{n-\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi_\lambda^{n+\nu}(x_0)}{\lfloor n+\nu} \left[\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1} \right]^{n+\nu} \right\}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n)$$

représentent à l'intérieur de l'anneau circulaire X un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (A). *Ces expressions représentent les valeurs des intégrales pour chaque paire de valeurs ρ, ϑ ($x = \rho e^{i\vartheta}$), qui correspondent à un point à l'intérieur de l'anneau circulaire considéré. Pour $x = x_0$ et $\vartheta = \vartheta_0$ les relations* (10) *ont lieu. Les constantes $c_{\lambda m}$ sont définies par les formules* (17) *et les coefficients $\psi_\lambda^{n+\nu}(x_0)$ par les formules de recursion* (19), *dans lesquelles les expressions $\varphi(x_0)$ sont données en fonctions des constantes de l'équation différentielle considérée.*

Vu que $y_1, \ldots, y_n$ forment un système fondamental d'intégrales et que chaque intégrale de (A) doit pouvoir être exprimée en fonction homogène linéaire à coefficients constants de $y_1, \ldots, y_n$, on obtient donc par là une expression semblable qui donne la valeur de chaque intégrale pour une paire quelconque de valeurs ρ, ϑ correspondant à un point à l'intérieur de X. Toutes les quantités indépendantes de x dans cette expression sont des fonctions analytiques des coefficients de l'équation différentielle proposée, du point x_0 choisi arbitrairement à l'intérieur de X et de la quantité positive $2h$, le logarithme naturel du rapport des rayons des deux cercles qui limitent l'anneau circulaire X. Cet anneau se confond avec C si l'on donne à h sa plus grande valeur h_0, en prenant x_2 sur le cercle limite extérieur, et x_1 sur le cercle limite intérieur de C.

Les coefficients des différentes puissances de

$$t = \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}$$

dans l'équation (21) sont des fonctions rationnelles et entières de $\frac{h}{\pi i}$.

Si l'équation différentielle (A) a la forme (B) de l'introduction, tous ces coefficients sont de plus, par suite de l'équation (9), des fonctions rationnelles et entières des coefficients A_{rq} ($r = 1, 2, \dots, n$; $q = 0, 1, \dots, p_r$) et des fonctions rationnelles de x_0 et des zéros de $P_0(x)$. Les coefficients de ces fonctions sont des nombres entiers. On peut ainsi transformer (21) en une série qui procède selon les puissances entières et positives des quantités A_{rq} et de t et qui est convergente pour tous les systèmes de valeurs finies A_{rq} et pour $|t| < 1$.[1]

Les intégrales $y_1, \dots, y_n$, considérées comme fonctions de la variable auxilière t, ont des propriétés qu'il est bien de remarquer.

On a

$$(22) \qquad y_m(x) = P_m(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\lambda m} \left\{ \frac{1}{\underline{|n-\lambda}} t^{n-\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{\lambda}^{(n+\nu)}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} t^{n+\nu} \right\} \qquad (m=1,2,\dots,n)$$

La série du côté droit de cette équation qui procède suivant les puissances entières et positives de t est convergente comme nous savons pour toutes les valeurs de t pour lesquelles on a $|t| < 1$.

Lorsque x se trouve dans le voisinage immédiat du point x_0 defini par les valeurs ρ_0, ϑ_0, on a

$$y_m(x) = \mathfrak{P}_m(x - x_0) = P_m(t); \qquad (m=1,2,\dots,n)$$

et lorsque x se trouve dans le voisinage du point x_0, définie par les valeurs ρ_0, $\vartheta_0 + 2\pi$, on a également

$$y_m(x) = \overline{\mathfrak{P}}_m(x - x_0) = \overline{P}_m(t).$$

Quand x passe du point x_0 défini par ρ_0, ϑ_0 au point x_0 défini par $\rho_0, \vartheta_0 + 2\pi$, t se transforme en t' et l'on a par suite de l'équation (7)

$$(23) \qquad \frac{t'+1}{t'-1} = K\frac{t+1}{t-1}; \qquad K = e^{-\frac{\pi^2}{h}}.$$

Vu que la série $P_m(t)$ est convergente pour toutes les valeurs de t pour lesquelles $|t| < 1$, on doit avoir

$$P_m(t') = \overline{P}_m(t).$$

---

[1] Voir page 21.

Mais il suit des formules (14) et (17) que les fonctions $P_m(t)$ $(m=1, 2, \ldots, n)$ représentent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle transformée en t par la substitution (7'). Le système d'intégrales $\overline{P}_m(t)$ de cette équation différentielle en t peut donc être exprimé en fonctions linéaires à coefficients constants des $P_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$. On a donc le résultat suivant:

Si $|t| < 1$ *et que l'on applique la substitution* (23) *on a*

$$P_m(t') = C_{1m}P_1(t) + \ldots + C_{nm}P_n(t). \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

Les quantités $C_{1m}, \ldots, C_{nm}$ *sont des constantes indépendantes de* t.

On peut énoncer de même que si le second terme de l'équation différentielle (A) est égal à zéro les constantes $C_{11}, \ldots, C_{nn}$ sont assujetties à la condition suivante

$$\sum \pm C_{11}C_{22} \ldots C_{nn} = 1.[1]$$

La propriété que nous avons obtenu pour les fonctions $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ est tout à fait analogue à celle qui caractérise les fonctions nommées par M. Poincaré *fonctions zétafuchsiennes.*

§ 2. *Une première méthode de représenter les invariants d'une substitution qui correspond à une ligne fermée qui embrasse les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire C.*

Soit comme dans le paragraphe précédent $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (A) transformée en t, définies par les conditions que, pour $t = 0$, on ait

$$(1) \qquad \frac{d^\nu v_m}{dt^\nu} = 0, \qquad \begin{matrix} \nu \gtrless n - m \\ \nu \leqq n - 1 \end{matrix}; \qquad \frac{d^{n-m} v_m}{dt^{n-m}} = 1,$$

et qui, par conséquent, peuvent être représentées par les séries suivantes

$$(2) \qquad v_m(t) = \frac{t^{n-m}}{\lfloor n - m} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_m^{n+\nu}(x_0) \frac{t^{n+\nu}}{\lfloor n + \nu} \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

[1] Voir Poincaré, *Sur les groupes* etc., pag. 202.

procédant selon les puissances entières et positives de t et convergentes pour toutes les valeurs de t, pour lesquelles $|t| < 1$. Les coefficients $\psi_m^{n+\nu}(x_0)$ dans ces séries sont définis par les formules de recursion (19) du paragraphe précédent.

Le côté droit de l'équation

$$(3) \qquad z_m(x) = v_m\left(\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}\right) \qquad (m=1, 2, \ldots, n)$$

où

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} = 1$$

pour

$$\rho = \rho_0, \qquad \vartheta = \vartheta_0 \qquad (x = \rho e^{i\vartheta}, \; x_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0})$$

nous fournit donc une expression qui permet de calculer les intégrales d'un système fondamental [1] qui correspondent à un point quelconque x, situé à l'intérieur de l'anneau circulaire X limité par deux cercles dont le centre commun est situé en $x = 0$ et dont les rayons sont égaux respectivement à $|x_1|$ et à $|x_2|$.

Posons maintenant

$$(4) \qquad v_{m\lambda}(t) = \frac{d^{n-\lambda} v_m(t)}{dt^{n-\lambda}},$$

$$(5) \qquad t_0 = \frac{\left(\frac{x_0 e^{2\pi i}}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x_0 e^{2\pi i}}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1} = \frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1}.$$

En posant de plus comme au paragraphe précédent

$$(6) \qquad \frac{t' + 1}{t' - 1} = e^{-\frac{\pi^2}{h}} \frac{t + 1}{t - 1},$$

[1] Il résulte immédiatement de la formule (14) du paragraphe précédent que $z_1(x)$, $\ldots$, $z_n(x)$ forment un système fondamental d'intégrales.

on a, comme on s'assure facilement,

$$(7) \qquad v_m(t') = v_{m1}(t_0)v_1(t) + v_{m2}(t_0)v_2(t) + \ldots + v_{mn}(t_0)v_n(t). \quad {\scriptstyle (m=1,2,\ldots,n)}$$

Soit maintenant $\mathfrak{P}_1(x-x_0), \ldots, \mathfrak{P}_n(x-x_0)$ les éléments des fonctions $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ qui correspondent au point x_0 et à la paire de valeurs ρ_0, ϑ_0. Lorsque la variable x décrit un contour fermé L, qui ne se coupe pas lui-même et qui embrasse les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire C, ces éléments subissent une substitution linéaire

$$(8) \qquad S = \begin{vmatrix} v_{11}(t_0) & v_{12}(t_0) & \ldots & v_{1n}(t_0) \\ v_{21}(t_0) & v_{22}(t_0) & \ldots & v_{2n}(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1}(t_0) & v_{n2}(t_0) & \ldots & v_{nn}(t_0) \end{vmatrix}.$$

Nous obtenons donc pour les coefficients de cette substitution les expressions suivantes

$$(9) \qquad \alpha_{m\lambda} = v_{m\lambda}(t_0) = k_{m\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_m^{n+\nu}(x_0) \frac{1}{\underline{|\lambda+\nu}} \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1} \right\}^{\lambda+\nu}$$

où l'on a

$$(10) \qquad \begin{cases} k_{m\lambda} = 0 \ \text{pour} \ \lambda < m \ \text{mais} \\ k_{m\lambda} = \dfrac{1}{\underline{|\lambda-m}} \left(\dfrac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1} \right)^{\lambda-m} \qquad \text{pour} \ \lambda \geqq m. \end{cases}$$

La quantité h qui entre dans l'équation (9) est une quantité positive, laquelle, le point x_0 étant fixé, peut être choisie arbitrairement, pourvu pourtant que sa valeur ne dépasse pas celle que le membre droit de l'équation (4) au § 1 obtient, lorsque l'un des deux points x_1 ou x_2 est situé sur un cercle limite de C, tandis que l'autre de ces deux points est situé sur l'autre cercle limite ou à l'intérieur de C.

Si en désignant par ρ_1 et ρ_2 les rayons des deux cercles limites de C ($\rho_1 < \rho_2$) l'on pose $x_1 = \rho_1$, $x_2 = \rho_2$, et par conséquent $x_0 = \sqrt{\rho_1\rho_2}$, on obtient les expressions des coefficients de substitution données par M. Poincaré.[1]

[1] Voir Poincaré, *Sur les groupes* etc., pag. 211.

Soit x_0 un point quelconque, appartenant à un anneau circulaire X_0, concentrique à l'anneau C et situé à l'intérieur de ce dernier.

Les séries

$$v_{m\lambda}(t), \qquad \binom{m=1,\ldots,n}{\lambda=1,\ldots,n}$$

de même que les séries

$$V_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi^\nu_\mu(x_0)t^\nu; \qquad (\mu=1,2,\ldots,n) \tag{11}$$

qui représentent les coefficients des différentes puissances de ω dans

$$\begin{cases} (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} v_{11}(t)-\omega & v_{12}(t) & \ldots & v_{1n}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t)-\omega & \ldots & v_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1}(t) & v_{n2}(t) & \ldots & v_{nn}(t)-\omega \end{vmatrix} = \\ \omega^n + V_1(t)\cdot\omega^{n-1} + \ldots + V_{n-1}(t)\cdot\omega + V_n(t) \end{cases} \tag{12}$$

sont convergentes pour toutes les valeurs de t, pour lesquelles $|t| < 1$.

Les fonctions

$$\psi^{n+\nu}_m(x_0) \qquad \binom{m=1,2,\ldots,n}{\nu=0,1,2,\ldots}$$

$$\Psi^\nu_\mu(x_0) \qquad \binom{\mu=1,2,\ldots,n}{\nu=0,1,2,\ldots}$$

sont formées par l'addition et par la multiplication des coefficients de l'équation différentielle (A) $p_1(x_0),\ldots,p_n(x_0)$, des dérivées de ces coefficients, de x_0, de $\frac{h}{\pi i}$ et de certains nombres rationnels (voir formule (19) du paragraphe précédent). Si par conséquent $p_1(x_0),\ldots,p_n(x_0)$ sont représentés à l'intérieur de C par des séries procédant selon les puissances entières positives et négatives de x_0, on obtiendra aussi $\psi^{n+\nu}_m(x_0)$ et $\Psi^\nu_\mu(x_0)$ exprimées sous la même forme.

Soit maintenant h_0 la limite supérieure de h lorsque x_0 varie à l'intérieur et sur la limite de X_0; prenons

$$0 < h_1 < h < h_0$$

et posons

$$R_1 = \frac{1 - e^{-\frac{\pi^2}{h_1}}}{1 + e^{-\frac{\pi^2}{h_1}}},$$

$$R = \frac{1 - e^{-\frac{\pi^2}{h}}}{1 + e^{-\frac{\pi^2}{h}}}.$$

On a alors

$$1 > R_1 > R > 0.$$

Si l'on fait alors parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur et sur la limite de X_0 et si l'on donne à t toutes les valeurs pour lesquelles $|t| \leqq R_1$, il existe une limite supérieure que les modules des coefficients de l'équation différentielle (A), transformée en t, ne peuvent jamais dépasser. De cette circonstance, ainsi que de la procédure employée par Weierstrass [1] ainsi que par Briot et Bouquet [2] pour démontrer la convergence des séries

$$v_m(t), \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

il résulte immédiatement que les séries

$$v_{m\lambda}(t) \qquad \left(\begin{smallmatrix}\lambda = 1, 2, \ldots, n\\ m = 1, 2, \ldots, n\end{smallmatrix}\right)$$

ainsi que les séries

$$V_\mu(t) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

considérées comme fonctions de x_0 aussi bien que de t, sont uniformément convergentes dans le domaine X_0 et $|t| \leqq R$.

De cette dernière circonstance résulte que les séries

$$\alpha_{m\lambda} = v_{m\lambda}(t_0) = k_{m\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_m^{n+\nu}(x_0) \frac{t_0^{\lambda+\nu}}{\underline{|\lambda+\nu}} \qquad \left(\begin{smallmatrix}m = 1, 2, \ldots, n\\ \lambda = 1, 2, \ldots, n\end{smallmatrix}\right) \tag{9}$$

---

[1] Weierstrass, *Über die Theorie der analytischen Facultäten.* Journal für Mathematik, Bd. 51, pag. 43, et Sophie Kowalevski, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Einleitung.* Journal für Mathematik, Bd. 80.

[2] Briot et Bouquet. *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles.* Deuxième mémoire. Journal de l'école polytechnique. Cahier 36 (Tome 21), page 133 sqq.

et

$$V_\mu(t_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi^\nu_\mu(x_0) t_0^\nu, \qquad (\mu=1,2,\ldots,n) \tag{13}$$

les quantités h et t_0 étant des constantes données, sont uniformément convergentes pour toutes les valeurs de x_0 appartenant au domaine X_0.

Les séries (9) et (13) peuvent donc, en vertu d'un théorème de M. Weierstrass,[1] être transformées en séries procédant selon les puissances positives et négatives de x_0 et convergentes dans le domaine X_0.

Les séries

$$V_\mu(t_0) \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

sont les invariants cherchés pour l'anneau circulaire C. Ils sont indépendants de x_0 et si l'on pose par conséquent

$$\Psi^\nu_\mu(x_0) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \Psi^\nu_{\mu\lambda} \,.\, x_0^\lambda, \qquad (\mu=1,2,\ldots,n) \tag{14}$$

chacune des quantités

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi^\nu_{\mu\lambda} \,.\, t_0^\nu \qquad \begin{pmatrix} \lambda=-1,-2,-3,\ldots \\ \lambda=\;\;1,\;\;2,\;\;3,\ldots \\ \mu=1,2,\ldots,n \end{pmatrix} \tag{15}$$

doit être égale à zéro et l'on doit avoir

$$V_\mu(t_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi^\nu_{\mu 0} \,.\, t_0^\nu. \qquad (\mu=1,2,\ldots,n) \tag{16}$$

Cette formule nous donne l'une des expressions, que nous nous sommes proposé de déduire pour les invariants. Elle ne contient plus x_0, comme le fait l'expression donnée par M. Poincaré, mais elle contient encore la quantité positive arbitraire h, dont la valeur de l'invariant est indépendante. Les coefficients $\Psi^\nu_{\mu 0}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ sont des fonctions rationnelles de $\frac{h}{\pi i}$, et pour t_0 on a l'expression

$$t_0 = \frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1}.$$

---

[1] Weierstrass. *Zur Functionenlehre.* Abhandlungen aus der Functionenlehre. Berlin 1886. Pag. 73.

La quantité h est positive et comprise entre les limites

$$(17)\qquad 0 < h \leqq \frac{1}{2}\log\frac{\rho_2}{\rho_1},[1]$$

ρ_1 designant le rayon du cercle limite intérieur et ρ_2 le rayon du cercle limite extérieur de C.

Supposons que les coefficients de l'équation différentielle (A) soient des fonctions rationnelles de x, de manière que cette équation puisse s'écrire sous la forme (voir l'introduction)

$$(\mathrm{B})\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{P_2(x)}{P_0(x)}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{P_n(x)}{P_0(x)}y = 0,$$

où

$$P_0(x) = (x - a_1)^{q_1}(x - a_2)^{q_2}\ldots(x - a_p)^{q_p}$$

et

$$P_r(x) = A_{r0} + A_{r1}x + A_{r2}x^2 + \ldots + A_{rp_r}x^{p_r}. \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

Supposons de plus que les coefficients $\psi_m^{n+\nu}(x_0)$ ($m = 1, 2, \ldots, n$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) dans les expressions (9, § 1) des coefficients de substitution soient exprimées explicitement en fonctions de $P_0(x), \ldots, P_n(x)$ et de leurs dérivées. Les fonctions $\psi_m^{n+\nu}(x_0)$ sont alors des fonctions rationnelles de $x_0, a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières rationnelles de A_{rq} ($r = 1, 2, \ldots, n$, $q = 0, 1, 2, \ldots, p_r$) et du quotient $\frac{h}{\pi i}$. Tous les coefficients de ces fonctions sont des nombres entiers.

Si on calcule les coefficients $\Psi_\mu^\nu(x_0)$ ($\mu = 1, 2, \ldots, n$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) dans les expressions (13) qui représentent les invariants substitutionnels, ces coefficients seront aussi des fonctions rationnelles de $x_0, a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières rationnelles de A_{rq} et de $\frac{h}{\pi i}$, dans lesquelles les coefficients seront des nombres entiers.

Il n'est point difficile de montrer, que les séries (9) et (16) sont uniformément convergentes dans chaque domaine fini des quantités A_{rq} ($r = 1, 2, \ldots, n$, $q = 0, 1, \ldots, p_r$); ces séries peuvent donc être ordonnées selon les puissances entières et positives de la variable t_0 et de ces quan-

[1] voir la formule (5) du § 1.

tités A_{rq} et elles restent convergentes pour tous les systèmes de valeurs finies des A_{rq}.[1] Les coefficients des différentes puissances de t_0 et des A_{rq} dans les coefficients substitutionnels sont des fonctions rationnelles de $x_0, a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières rationnelles de $\frac{h}{\pi i}$, et dans les invariants ce sont des fonctions rationnelles de $a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières de $\frac{h}{\pi i}$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Soit X un anneau circulaire dans le plan de x, ayant l'origine pour centre et ne conténant dans son intérieur aucun point singulier de l'équation différentielle (B).

Les invariants substitutionnels pour chaque substitution que l'on obtient en faisant parcourir à la variable indépendante x un parcours fermé, ne se coupant pas soi-même et embrassant les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire X, peuvent être représentés toujours sous la forme de séries procédant selon les puissances entières et positives des coefficients

$$A_{rq} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ q = 0, 1, \ldots, p_r \end{pmatrix}$$

et de la quantité

$$t_0 = \frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1},$$

h signifiant une quantité positive arbitraire, contenue entre les limites (17).

Ces séries sont convergentes pour tous les systèmes de valeurs finies des quantités A_{rq}. Les coefficients de ces séries sont des fonctions rationnelles des quantités $a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières rationnelles de $\frac{h}{\pi i}$ dont les coefficients sont des nombres entiers. Les invariants, dont les valeurs sont représentées par les sommes de ces séries, sont indépendants du choix de la quantité arbitraire h, pourvu que cette dernière soit prise entre les limites fixées.

---

[1] voir Poincaré. *Sur les groupes* etc., § 3.

§ 3. *Une seconde manière de représenter les invariants d'une substitution qui correspond à un parcours fermé embrassant les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire C.*

Soit x_0 un point quelconque à l'intérieur de C et introduisons dans l'équation différentielle (A) au lieu de la variable indépendante x une autre variable τ, définie par l'équation

$$x = x_0 e^{\tau}. \tag{1}$$

Désignons de plus par $u_1(\tau, x_0), \ldots, u_n(\tau, x_0)$ un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle transformée, défini par les conditions que pour $\tau = 0$ on ait

$$\frac{d^\nu u_m}{d\tau^\nu} = 0, \qquad \nu \gtrless n - m\,,\ \nu \leqq n - 1\,; \qquad \frac{d^{n-m} u_m}{d\tau^{n-m}} = 1\,. \tag{2}$$

Dans le voisinage de $\tau = 0$ ces intégrales sont représentées par des séries de la forme

$$u_m(\tau, x_0) = \frac{\tau^{n-m}}{\underline{|n-m}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_m^{n+\nu}(x_0) \frac{\tau^{n+\nu}}{\underline{|n+\nu}}. \qquad (m=1,2,\ldots,n) \tag{3}$$

Les coefficients $\chi_m^{n+\nu}(x_0)$ $(m = 1, 2, \ldots, n\,,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ peuvent être obtenus de la même manière que les coefficients $\varphi_m^{n+\nu}(x_0)$ dans le § 1. On obtient aussi des formules de récursion absolument analogues à celles que nous avons obtenu (19) § 1:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-m}} \cdot [n-m]_{m-1} \frac{\chi_1^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} + \frac{\underline{|n-2}}{\underline{|n-m}} \cdot [n-m]_{m-2} \frac{\chi_2^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} + \\
&\qquad\qquad \ldots + \frac{\underline{|n-m}}{\underline{|n-m}} \cdot [n-m]_0 \frac{\chi_m^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}} \\
&= \frac{[n-m]_{m+\nu}}{\underline{|n-m}} + x_0^m \cdot [n]_\nu \frac{\varphi_m^n(x_0)}{\underline{|n}} + x_0^{m+1} \cdot [n+1]_{\nu-1} \frac{\varphi_m^{n+1}(x_0)}{\underline{|n+1}} + \\
&\ldots + x_0^{m+\nu-1} \cdot [n+\nu-1]_1 \frac{\varphi_m^{n+\nu-1}(x_0)}{\underline{|n+\nu-1}} + x_0^{m+\nu} \cdot [n+\nu]_0 \frac{\varphi_m^{n+\nu}(x_0)}{\underline{|n+\nu}}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

Dans ces formules $[q]_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ désigne une constante définie par l'équation

$$(5) \qquad (e^u - 1)^q = u^q\{[q]_0 + [q]_1 u + [q]_2 u^2 + \ldots\}.$$

On a par conséquent:

$$(6) \qquad [q]_0 = 1 \quad \text{et} \quad [0]_\nu = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Nous poserons de plus

$$(7) \qquad [q]_\nu = 0 \quad \text{pour} \quad \nu = -1, -2, \ldots.$$

Le symbole $\varphi_m^{n+\nu}(x_0)$ $(m = 1, 2, \ldots, n, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ désigne l'expression de $\frac{d^{n+\nu}y}{dx^{n+\nu}}$ que l'on obtient en différentiant (A), en posant ensuite $x = x_0$ et en ayant égard aux équations (10) du § 1. Le rayon de convergence des séries (3) peut être obtenu de la manière suivante. On prend sur la ligne droite qui unit le point $x = 0$ avec le point $x = x_0$ deux points x' et x'', $|x'| < |x''|$, de manière que l'une de ces deux points au moins soit situé sur la limite, et l'autre à l'intérieur ou à la limite de C, et que l'on ait en plus

$$(8) \qquad x_0 = \sqrt{x'x''}.$$

Le rayon de convergence des séries (3) est

$$(9) \qquad h' = \frac{1}{2}\log\frac{x''}{x'}.$$

Il est à remarquer aussi que le rayon de convergence de ces séries reste égal à h', si l'on introduit partout $x_0 e^{\vartheta i}$ à la place de x_0, ϑ désignant une quantité réelle quelconque.

On remarque facilement que, de même que $u_1(\tau, x_0), \ldots, u_n(\tau, x_0)$ représentent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle transformée (A), de même les quantités

$$(10) \qquad \zeta_m(x) = u_m\left(\log\frac{x}{x_0}, x_0\right), \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

dans lesquelles $\log\frac{x}{x_0} = 1$ pour $\rho = \rho_0$ et $\vartheta = \vartheta_0$ $(x = \rho e^{i\vartheta}, x_0 = \rho_0 e^{i\vartheta_0})$

représentent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle primitive en x.

Il résulte aussi de la manière même, dont nous avons trouvé les séries (3), que les quantités

$$u_m(\tau - i\theta, x_0 e^{i\theta}) \qquad (m=1, 2, \ldots, n)$$

représentent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (A) transformée en τ à l'aide de l'équation (1); et que les quantités

$$u_m\left(\log \frac{x}{x_0 e^{i\theta}}, x_0 e^{i\theta}\right). \qquad (m=1, 2, \ldots, n)$$

dans lesquelles $\frac{x}{x_0 e^{i\theta}} = 1$ pour $\rho = \rho_0$ et $\vartheta = \vartheta_0 + \theta$, représentent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle primitive en x.

Posons maintenant

$$u_{m\lambda}(\tau, x_0) = \frac{d^{n-\lambda} u_m(\tau, x_0)}{d\tau^{n-\lambda}} \qquad \tag{11} \begin{pmatrix} m=1, 2, \ldots, n \\ \lambda=1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

et soit l un nombre entier positif, suffisamment grand pour que l'on ait

$$\frac{2\pi}{l} < h'. \tag{12}$$

Le point $\tau = i\theta + \frac{2\pi i}{l}$ appartient dans ce cas au domaine de convergence des séries qui représentent les valeurs des fonctions

$$u_m(\tau - i\theta, x_0 e^{i\theta}) \qquad (m=1, 2, \ldots, n)$$

dans le voisinage de $\tau = i\theta$.

On voit maintenant sans difficulté que dans le voisinage immédiat de $\tau = \frac{2\pi i}{l}$, et par conséquent pour toutes les valeurs de τ, on a les relations

$$\tag{13} \left\{ \begin{aligned} u_m(\tau, x_0) = u_{m1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) u_1\left(\tau - \frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) + \ldots \\ + u_{mn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) u_n\left(\tau - \frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) \end{aligned} \right. \qquad (m=1, 2, \ldots, n)$$

desquelles découle

$$
(14)\quad \begin{cases}
u_m\left(\tau-\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) = u_{m1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) u_1\left(\tau - 2\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right) + \dots \\
\qquad\qquad + u_{mn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) u_n\left(\tau - 2\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right), \\
u_m\left(\tau- 2\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right) = u_{m1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right) u_1\left(\tau - 3\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{3\frac{2\pi i}{l}}\right) + \dots \\
\qquad\qquad + u_{mn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{2\frac{2\pi i}{l}}\right) u_n\left(\tau - 3\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{3\frac{2\pi i}{l}}\right), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_m\left(\tau-(l-1)\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) = u_{m1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) u_1(\tau - 2\pi i, x_0 e^{2\pi i}) + \dots \\
\qquad\qquad + u_{mn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) u_n(\tau - 2\pi i, x_0 e^{2\pi i}).
\end{cases}
\qquad {\scriptstyle (m=1,2,\dots,n)}
$$

Si l'on pose maintenant

$$
(15)\qquad \tau = 2\pi i + \tau',
$$

en remarquant que

$$
(16)\qquad u_m(\tau', x_0 e^{2\pi i}) = u_m(\tau', x_0), \qquad {\scriptstyle (m=1,2,\dots,n)}
$$

on voit que

$$
(17)\quad \begin{cases}
u_m(2\pi i + \tau', x_0) = \alpha_{m1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) u_1(\tau', x_0) + \dots \\
\qquad\qquad + \alpha_{mn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) u_n(\tau', x_0).
\end{cases}
\qquad {\scriptstyle (m=1,2,\dots,n)}
$$

Les quantités $\alpha_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right)$ $(m = 1, 2, \dots, n, \lambda = 1, 2, \dots, n)$ sont les coefficients de la substitution que l'on obtient en appliquant l'une après l'autre les substitutions dont les coefficients sont

$$
u_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), \; u_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right), \; \dots, \; u_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right).
$$

Nous exprimons ceci par l'équation suivante:

$$
(18)\quad \left|
\begin{array}{c}
\begin{vmatrix}
\alpha_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), & \dots, & \alpha_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \\
\dots & \dots & \dots \\
\alpha_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), & \dots, & \alpha_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right)
\end{vmatrix} = \\
\begin{vmatrix}
u_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), & \dots, & u_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \\
\dots & \dots & \dots \\
u_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), & \dots, & u_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right)
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
u_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right), & \dots, & u_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right) \\
\dots & \dots & \dots \\
u_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right), & \dots, & u_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{\frac{2\pi i}{l}}\right)
\end{vmatrix} \\
\dots
\begin{vmatrix}
u_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right), & \dots, & u_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right) \\
\dots & \dots & \dots \\
u_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right), & \dots, & u_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0 e^{(l-1)\frac{2\pi i}{l}}\right)
\end{vmatrix}.
\end{array}
\right|
$$

Des équations (10) et (17) il résulte que lorsque la variable indépendante x en partant du point x_0 décrit le contour fermé L, qui ne se coupe pas et qui embrasse les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire C, les éléments des intégrales $\zeta_1(x), \zeta_2(x), \dots, \zeta_n(x)$, qui correspondent au point x_0 et à la paire de valeurs ρ_0, ϑ_0, se transforment en d'autres éléments à l'aide de la substitution:

$$
S = \begin{vmatrix}
\alpha_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), & \dots, & \alpha_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \\
\dots & \dots & \dots \\
\alpha_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), & \dots, & \alpha_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right)
\end{vmatrix}.
$$

Les expressions que nous avons obtenu pour les coefficients d'une pareille substitution peuvent être présentées sous la forme de séries:

$$
(19)\qquad \alpha_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi^{\nu}_{l,m,\lambda}(x_0)\left(\frac{2\pi i}{l}\right)^{\nu} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \dots, n \\ \lambda = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}
$$

dans lesquelles les fonctions

$$\chi^{\nu}_{l,m,\lambda}(x_0) \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\ldots,n \\ \lambda=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

peuvent être exprimées immédiatement par les fonctions

$$\chi^{n+\nu}_{m}\left(x_0 e^{k\frac{2\pi i}{l}}\right). \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\ldots,n \\ k=0,1,2,\ldots,l-1 \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

Les invariants sont les coefficients

$$U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right) \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

des différentes puissances de ω dans

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_{11}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right)-\omega, & \ldots, & \alpha_{1n}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right), & \ldots, & \alpha_{nn}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right)-\omega \end{vmatrix} \\ &= \omega^n + U_1\left(\frac{2\pi i}{l}\right)\omega^{n-1} + \ldots + U_{n-1}\left(\frac{2\pi i}{l}\right)\omega + U_n\left(\frac{2\pi i}{l}\right) \end{aligned} \right.$$

et peuvent être représentés sous la forme

$$(21) \qquad U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} X^{\nu}_{l,\mu}(x_0)\left(\frac{2\pi i}{l}\right)^{\nu}, \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

les expressions des coefficients:

$$X^{\nu}_{l,\mu}(x_0) \qquad \begin{pmatrix} \mu=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

à l'aide des coefficients des séries (19) s'obtenant immédiatement.

Les expressions des coefficients substitutionnels que nous venons de trouver coïncident pour $l = 1$ avec celles données par M. Hamburger.[1]

Pour la convergence il est alors nécessaire que la quantité positive h' soit assez grand pour qu'on puisse mettre en (12) $l = 1$. C'est cette condition qui fait la restriction à la méthode de M. Hamburger et dont M. Poincaré[2] était parvenu déjà à se libérer, mais d'une toute autre manière que celle que nous venons d'employer.

[1] *Über ein Princip* etc.

[2] voir page 3.

Tout à fait de la même manière, que nous l'avons fait pour les fonctions $v_{m\lambda}(t_0)$, $V_\mu(t_0)$ au § 2, on peut démontrer maintenant, que les séries

$$\alpha_{m\lambda}\left(\frac{2\pi i}{l}, x_0\right) \qquad \binom{m=1,2,\ldots,n}{\lambda=1,2,\ldots,n}$$

et

$$U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right), \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

pour des valeurs suffisamment grandes de l, peuvent être transformées en séries procédant d'après les puissances positives et négatives de x_0.

Vu que les invariants

$$U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right) \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

sont indépendants de x_0, les séries doivent se réduire pour eux à un seul terme indépendant de x_0. On n'a besoin de calculer, par conséquent, que le terme $X^\nu_{l,\mu,0}$ dans le développement de

$$(22) \qquad X^\nu_{l,\mu}(x_0) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} X^\nu_{l,\mu,\lambda} x_0^\lambda \qquad \binom{\mu=1,2,\ldots,n}{\nu=0,1,2,\ldots}$$

et l'on obtient alors:

$$(23) \qquad U_\mu\left(\frac{2\pi i}{l}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} X^\nu_{l,\mu,0}\left(\frac{2\pi i}{l}\right)^\nu. \qquad (\mu=1,2,\ldots,n)$$

Dans cette expression des invariants l désigne un nombre entier positif quelconque, assujetti seulement à remplir la condition

$$(24) \qquad \frac{2\pi}{l} < \frac{1}{2}\log\frac{\rho_2}{\rho_1},$$

où ρ_2 est le rayon du cercle limite extérieur et ρ_1 le rayon du cercle limite intérieur de C.

On obtient des formules particulièrement intéressantes en faisant croître l à l'infini et en calculant les limites auxquelles tendent alors les termes différents dans l'équation (23). Nous allons étudier ce cas dans un autre mémoire.

Si l'équation différentielle proposée a la forme (B) — voir l'introduction — les coefficients:

$$\chi^{\nu}_{l,m,\lambda}(x_0) \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\ldots,n \\ \lambda=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

dans l'expression (19) des coefficients substitutionnels sont des fonctions rationnelles de $e^{\frac{2\pi i}{l}}$, de x_0, de $a_1, \ldots, a_p$ et de A_{rq} dont les coefficients sont des nombres entiers. Les coefficients

$$X^{\nu}_{l,\mu,0} \qquad \begin{pmatrix} \mu=1,2,\ldots,n \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

dans les expressions (23) des invariants $U_{\mu}\left(\frac{2\pi i}{l}\right)$ sont des fonctions rationnelles de $e^{\frac{2\pi i}{l}}$ et de $a_1, \ldots, a_p$ et des fonctions entières rationnelles des A_{rq} dont les coefficients sont des nombres entiers.

Les séries (19) et (23) peuvent être écrites sous la forme de séries procédant selon les puissances entières et positives de $\frac{2\pi i}{l}$ et des quantités A_{rq}. Par rapport à ces dernières elles sont toujours convergentes (voir page 21). Les coefficients de ces séries sont des fonctions rationnelles en x_0, $a_1, \ldots, a_p$ et en $e^{\frac{2\pi i}{l}}$ qui dans la formule (23) ne contient plus x_0 et dont les coefficients sont des nombres entiers.

Nous pouvons donc entre autres énoncer le théorème suivant:

Soit X un anneau circulaire, qui a l'origine pour centre et qui embrasse un certain nombre de points singuliers de l'équation différentielle (B). *Les invariants de chaque substitution, que l'on obtient en faisant parcourir à la variable indépendante x un contour fermé qui ne se coupe pas soi-même et qui embrasse les mêmes points singuliers que l'anneau circulaire X, peuvent toujours être représentés sous la forme de séries ordonnées selon les puissances entières positives des coefficients*

$$A_{rq} \qquad \begin{pmatrix} r=1,2,\ldots,n \\ q=0,1,2,\ldots,p_r \end{pmatrix}$$

et de la quantité

$$\frac{2\pi i}{l},$$

où l désigne un nombre entier positif qui peut être fixé arbitrairement à partir d'une limite inférieure donnée.

Ces séries sont convergentes pour tous les systèmes de valeurs finies des A_{rq}. Les coefficients de ces séries sont des fonctions rationnelles des $a_1, \ldots, a_p$ et de $e^{\frac{2\pi i}{l}}$ dont les coefficients sont des nombres entiers.

§ 4. *Représentation analytique des invariants d'une substitution correspondant à une ligne fermée qui embrasse des points singuliers, tous situés sur une même ligne droite.*

Soient a et b deux points singuliers quelconques. Parmi les ellipses confocales, dont les foyers sont les points a et b, il y en a une infinité, qui jouissent de la propriété de ne point embrasser d'autres points singuliers que ceux qui sont situés sur la ligne droite allant de a à b. Désignons par α et β le grand et le petit axe d'une telle ellipse.

Posons

$$x = \frac{b-a}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{b+a}{2}.$$

A l'aide de cette substitution, la partie du plan des x, limitée par la ligne droite allant de a à b et par la périférie de l'ellipse considérée, est projetée dans le plan des z soit sur un anneau circulaire dont le cercle limite intérieur a pour rayon l'unité, tandis que le cercle limite extérieur a un rayon

$$\rho = \frac{\alpha + \beta}{\left|\frac{b-a}{2}\right|},$$

soit sur un autre anneau circulaire, dont le cercle limite extérieure a l'unité pour rayon, tandis que le rayon ρ_1 du cercle limite intérieur est déterminé par l'équation

$$\rho_1 = \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha - \beta}{\left|\frac{b-a}{2}\right|}.$$

A la ligne droite double, allant de a à b, correspond par conséquent dans cette substitution le cercle dont le rayon est égal à l'unité, tandis que la périphérie de l'ellipse considérée est projetée tant sur le cercle dont le rayon est ρ que sur le cercle dont le rayon est égal à $\frac{1}{\rho}$.

Si l'on considère dans le plan des x une ligne fermée continue L_x qui n'a pas de points doubles, qui entoure la ligne droite (ab) et qui n'embrasse pas d'autres points singuliers que ceux situés sur cette ligne, les coefficients de la substitution correspondante ne changent point, si au lieu de la ligne primitive L_x nous prenons une ligne fermée quelconque sans points doubles, située toute entière dans la partie du plan des x limitée par la ligne droite (ab) et par la périphérie de l'ellipse considérée.

A l'aide de l'expression de x en z la ligne L_x se trouve projetée sur deux lignes L'_z et L''_z, dont chacune appartient toute entière à l'intérieur de l'un des deux anneaux circulaires correspondant à l'intérieur de l'ellipse.

Si l'on parvient à représenter les invariants des substitutions qui correspondent aux lignes L'_z et L''_z pour l'équation différentielle (A) transformée en z, on trouve par là même l'expression des invariants de la substitution correspondant à la ligne L_x pour l'équation différentielle proposée.

Si l'on observe maintenant que les deux constantes dans l'expression de x en z sont des fonctions entières rationnelles de a et b, a et b étant deux points singuliers de l'équation différentielle proposée, on voit immédiatement, que dans le cas où les coefficients de l'équation différentielle sont des fonctions rationnelles, c'est à dire dans le cas où l'équation différentielle a la forme (B), les deux théorèmes énoncés à la fin des paragraphes 2 et 3 subsistent avec le changement suivant: au lieu de dire que le »parcours» dont il est question dans ces théorèmes peut toujours être inscrit dans l'intérieur d'un anneau circulaire sans passer par aucun point singulier, on doit dire maintenant que ce parcours embrasse toujours les mêmes points singuliers, situées sur une même ligne droite.

SUR UN PROBLÈME DE REPRÉSENTATION CONFORME

PAR

GUSTAV CASSEL
à STOCKHOLM.

Les auteurs qui se sont occupés du problème de la représentation conforme d'une aire plane sur l'intérieur d'un cercle n'ont jusqu'ici, que je sache, traité que des cas où l'aire considérée est limitée par un nombre fini d'arcs réguliers de lignes analytiques. Cette circonstance donnera peut-être quelque intérêt aux pages suivantes où je m'occuperai de la représentation conforme d'une aire dont le contour est formé par une infinité d'arcs de cercle.

Dans une note intitulée *Ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Functionen*,[1] M. H. Weber a traité le problème d'exprimer par des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire deux variables remplissant une équation algébrique de forme hyperelliptique. A cet effet il commence par résoudre le problème de représenter conformément sur un demi-plan une aire U définie de la manière suivante. Imaginons une aire U_0 limitée par un nombre fini de circonférences ayant leurs centres sur l'axe réel et ne possédant pas de points communs. Soit U l'ensemble des points de U_0, dont la deuxième coordonnée est positive.

Il est facile d'étendre l'étude de M. Weber au cas où les circonférences données sont en nombre infini, du moins sous une supposition que nous allons préciser tout à l'heure.

---

[1] Nachrichten d. Ges. d. W. zu Göttingen, 1886.

Nous pouvons représenter les divers cercles par les symboles C_μ, μ parcourant toute la série des nombres entiers positifs.

Soit c_μ le centre du cercle C_μ et soient a_μ, b_μ les deux points où ce cercle coupe l'axe réel; soit $b_\mu > a_\mu$. Désignons par $C_{\mu(+1)}$ et par $C_{\mu(-1)}$ les cercles voisins du cercle C_μ, à droite et à gauche. Désignons de plus par $a_{\mu(+1)}$ et $b_{\mu(+1)}$, respectivement par $a_{\mu(-1)}$ et $b_{\mu(-1)}$ les deux points où les cercles $C_{\mu(+1)}$ et $C_{\mu(-1)}$ coupent l'axe réel. Si aucun cercle ne se trouve le plus prochain du cercle C_μ du côté positif nous conviendrons de désigner par $a_{\mu(+1)}$ le point le plus prochain situé de ce côté qui est pour les cercles un point limite. Il n'y aura pas lieu de considérer le symbole $b_{\mu(+1)}$ dans ce cas. Nous ferons des conventions analogues à sujet des symboles $a_{\mu(-1)}$ et $b_{\mu(-1)}$, de manière que si aucun cercle n'est le plus prochain du cercle C_μ du côté négatif, le symbole $b_{\mu(-1)}$ désignera le point limite le plus prochain, tandis que $a_{\mu(-1)}$ n'aura aucun sens. Dans le cas où il existe deux cercles entre lesquels se trouvent tous les autres, nous convenons de considérer ces deux cercles comme voisins.

Nous pouvons supposer, sans que cela implique de restriction à la généralité, que toutes les circonférences données se trouvent dans un domaine fini. En effet il est toujours possible de satisfaire à cette condition par un changement linéaire de variable.

Supposons enfin que le rapport *anharmonique*

$$\frac{b_{\mu(-1)} - b_\mu}{b_{\mu(-1)} - a_\mu} \cdot \frac{a_{\mu(+1)} - a_\mu}{a_{\mu(+1)} - b_\mu}$$

ait une limite supérieure finie quand μ parcourt la série de tous les nombres entiers positifs.

Nous nous proposons de trouver la représentation conforme du domaine U sur la moitié d'un plan.

Pour résoudre ce problème, nous n'aurons qu'à suivre une voie tout à fait analogue à celle qu'a adoptée M. Phragmén pour exposer les résultats de M. Weber, dans un cours professé à l'université de Stockholm en 1889. J'ai présenté cette solution à la Conférence de mathématiques de la même université, où elle donna lieu à une discussion à laquelle je dois certaines simplifications de détails.

Voici comment on peut opérer:

Faisons correspondre à chacun des cercles C_μ une substitution linéaire $A_\mu(u)$ résultant de deux inversions successives par rapport au cercle C_μ et à l'axe réel.[1]

Désignons par U_μ le domaine transformé du domaine U_0 par la substitution linéaire $A_\mu(u)$. Ce domaine se trouve tout entier à l'intérieur de C_μ.

Soient a_λ^μ, c_λ^μ, b_λ^μ les points transformés de a_λ, c_λ, b_λ à l'aide de la substitution $A_\mu(u)$. J'emploie pour les substitutions d'ordre supérieur la notation suivante:

$$A_\mu(A_\nu u) = A_{\nu\mu}(u),$$

$$A_{\nu\mu}(A_\rho u) = A_{\rho\nu\mu}(u),$$

et ainsi de suite. Par la substitution $A_{\nu\mu}$ les points a_λ, c_λ, b_λ se transforment donc respectivement en les points $a_\lambda^{\nu\mu}$, $c_\lambda^{\nu\mu}$, $b_\lambda^{\nu\mu}$, et ainsi de suite.

Je désignerai par

$$U_{\nu_1 \ldots \nu_k}$$

le domaine transformé de U_0 par la substitution

$$A_{\nu_1 \ldots \nu_k}.$$

On a

$$A_{\mu\mu}(u) = u,$$

de manière que la substitution inverse de $A_\mu(u)$ est la substitution $A_\mu(u)$ elle-même. Par conséquent, l'inverse de la substitution

$$A_{\nu_1 \ldots \nu_k}(u)$$

est la substitution

$$A_{\nu_k \ldots \nu_1}(u).$$

Etudions maintenant le produit

$$\prod_{\nu_1 \neq \mu} \left(\frac{u - a_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{u - b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}} \right) = \prod_{\nu_1 \neq \mu} \left| 1 + \frac{b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k} - a_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{u - b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}} \right|$$

où μ doit parcourir toute la série des nombres entiers à partir de l'unité, et l'indice $\nu_1 \ldots \nu_k$ toutes les combinaisons et les arrangements

[1] Voir: Poincaré, *Mémoire sur les groupes kleinéens.* Acta mathematica, T. 3, p. 51.

d'entiers positifs, à l'exception de ceux où deux nombres égaux se suivent et de ceux dont le premier nombre est égal à μ.

Si nous envisageons un domaine qui n'est pas coupé par une infinité des cercles C_μ ou leurs transformés par les substitutions $A_{\nu_1 \ldots \nu_k}$, nous savons qu'il ne se trouve dans ce domaine qu'un nombre fini des points a_μ et b_μ, dans lesquels l'un des facteurs de notre produit est nul ou infini.

Si nous laissons de côté ces facteurs, le produit converge d'une manière absolue et uniforme dans tout le domaine considéré, pourvu que la série

$$\sum \left| b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k} - a_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k} \right|$$

soit convergente.

C'est en effet ce qui a lieu dans tous les cas où nos conditions sont remplies.

Il est clair que deux quelconques des domaines $U_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ n'ont jamais de parties communes. Donc, la somme des parties de l'axe réel qui se trouvent dans l'un quelconque des domaines $U_{\nu_1 \ldots \nu_k}$, à l'exception du domaine U_0, est nécessairement plus petite que la somme des diamètres des cercles C_μ originairement données. En vertu de ce que nous avons supposé, cette somme est finie.

Par conséquent, si nous désignons par $D_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ la somme des parties de l'axe réel intérieures à $U_{\nu_1 \ldots \nu_k}$, la série

$$\sum{}' D_{\nu_1 \ldots \nu_k}$$

est convergente. Le signe (′) près du symbole de sommation signifiera que le D qui correspond au domaine U_0, est supprimé.

Le domaine $U_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ est comme nous l'avons vu le transformé de U_0 par la substitution $A_{\nu_1 \ldots \nu_k}$. Ecrivons cette substitution linéaire sous la forme

$$u' = p + \frac{m}{u - q}.$$

Par la substitution $A_{\nu_k \ldots \nu_1}$ u' se transforme en u. Si nous attribuons à u' la valeur ∞, u prendra la valeur q. Donc, q est intérieur au cercle C_{ν_1}. D'ailleurs q est réel comme il est aisé de s'en assurer.

Désignons, pour abréger, par

$$a_1' b_1', \; a_2' b_2', \; , \ldots$$

les transformés par la substitution $A_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ des points

$$a_1 b_1 , a_2 b_2 , \ldots .$$

Nous aurons:

$$\pm D_{\nu_1 \ldots \nu_k} = \sum_\mu (a'_{\mu(+1)} - b'_\mu),$$

où μ doit parcourir toute la série des nombres entiers positifs.

D'ailleurs:

$$a'_{\mu(+1)} = p + \frac{m}{a_{\mu(+1)} - q}$$

et

$$b'_\mu = p + \frac{m}{b_\mu - q}.$$

Donc

$$\pm D_{\nu_1 \ldots \nu_k} = m \sum \frac{a_{\mu(+1)} - b_\mu}{(a_{\mu(+1)} - q)(b_\mu - q)}.$$

Puisque q est situé en dedans du cercle ν_1, tous les termes de cette série ont le même signe.

Si l'on observe que

$$b'_{\nu_1} - a'_{\nu_1} = \frac{m(b_{\nu_1} - a_{\nu_1})}{(b_{\nu_1} - q)(q - a_{\nu_1})},$$

on pourra éliminer m et l'on aura

$$\text{(A)} \qquad \pm D_{\nu_1 \ldots \nu_k} = (b'_{\nu_1} - a'_{\nu_1}) \left[\frac{(b_{\nu_1} - q)(q - a_{\nu_1})}{(b_{\nu_1} - a_{\nu_1})} \sum \frac{a_{\mu(+1)} - b_\mu}{(a_{\mu(+1)} - q)(b_\mu - q)} \right].$$

Dans l'expression entre [ ] du deuxième membre de l'équation (A) chaque terme est positif et différent de zéro.

Si nous considérons des substitutions différentes $A_{\nu_1 \ldots}$ dont l'indice commence par ν_1, q prendra des valeurs différentes dans l'intervalle $a_{\nu_1} \ldots b_{\nu_1}$. De plus, nous pouvons choisir à volonté l'indice ν_1. Je dis que, quand nous envisageons toutes les combinaisons des substitutions originairement données, la limite inférieure de l'expression entre [ ] est différente de zéro. Lorsque nous n'avons en vue que cela, il nous suffira d'étudier l'expression

$$f(q) = \frac{(b_{\nu_1} - q)(q - a_{\nu_1})}{b_{\nu_1} - a_{\nu_1}} \left\{ \frac{a_{\nu_1} - b_{\nu_1(-1)}}{(q - b_{\nu_1(-1)})(q - a_{\nu_1})} + \frac{a_{\nu_1(+1)} - b_{\nu_1}}{(q - b_{\nu_1})(q - a_{\nu_1(+1)})} \right\}$$

qui est, en effet, dans tous les cas plus petite que l'expression qui se trouve entre [] au second membre de l'équation (A).

Posons, pour abréger

$$a_{\nu_1(+1)} - b_{\nu_1} = \alpha,$$

$$b_{\nu_1} - a_{\nu_1} = \gamma,$$

$$a_{\nu_1} - b_{\nu_1(-1)} = \beta.$$

On voit que les quantités α, γ, β sont *positives* et que l'on aura:

$$f(q) = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{b_{\nu_1} - q}{q - b_{\nu_1(-1)}} \cdot \beta + \frac{q - a_{\nu_1}}{a_{\nu_1(+1)} - q} \cdot \alpha\right\}.$$

Différentiant par rapport à q nous aurons

$$f'(q) = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\alpha + \gamma}{(a_{\nu_1(+1)} - q)^2} \cdot \alpha - \frac{\beta + \gamma}{(q - b_{\nu_1(-1)})^2} \cdot \beta\right\}.$$

Pour les valeurs $q = a_{\nu_1}$ et $q = b_{\nu_1}$ $f(q)$ prend la valeur 1, comme il est aisé de s'en assurer. Donc $f'(q)$ prend la valeur 0 pour une valeur de q entre b_{ν_1} et a_{ν_1}. Pour $q = a_{\nu_1}$ on a

$$f'(q) = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} - \frac{\beta + \gamma}{\beta}\right\},$$

c'est à dire négatif.

Au contraire, pour $q = b_{\nu_1}$ on a

$$f'(q) = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\alpha + \gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\beta + \gamma}\right\},$$

ce qui est une valeur positive. Il résulte de là que $f(q)$ prend une valeur *minimum* dans l'intervalle $a_{\nu_1} \ldots b_{\nu_1}$.

La valeur $\bar{q}$ pour laquelle $f(q)$ prend cette valeur *minimum* est donnée par l'équation

$$\frac{a_{\nu_1(+1)} - \bar{q}}{\bar{q} - b_{\nu_1(-1)}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha + \gamma}}{\sqrt{\beta + \gamma}},$$

où toutes les racines doivent être prises dans le sens positif.

Posons:

$$a_{\nu_1(+1)} - \bar{q} = \lambda\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha+\gamma},$$

$$\bar{q} - b_{\nu_1(-1)} = \lambda\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\beta+\gamma};$$

on aura:

$$\lambda = \frac{a_{\nu_1(+1)} - b_{\nu_1(-1)}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\gamma}+\sqrt{\beta}\sqrt{\beta+\gamma}} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\gamma}+\sqrt{\beta}\sqrt{\beta+\gamma}},$$

et

$$f(\bar{q}) = \frac{1}{\gamma}\left|\frac{\lambda\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\gamma}-\alpha}{\lambda\sqrt{\beta}\sqrt{\beta+\gamma}}\cdot\beta + \frac{\lambda\sqrt{\beta}\sqrt{\beta+\gamma}-\beta}{\lambda\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\gamma}}\cdot\alpha\right|.$$

Il est facile de voir que cette expression a une limite inférieure différente de zéro.

En effet on obtient après quelques reductions:

$$f(\bar{q}) = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}}+1}.$$

Or nous avons supposé que

$$\frac{b_{\mu(-1)} - b_\mu}{b_{\mu(-1)} - a_\mu}\cdot\frac{a_{\mu(+1)} - a_\mu}{a_{\mu(+1)} - b_\mu}$$

reste toujours inférieur à une certaine quantité g. Donc on a

$$\frac{\beta+\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta} < g,$$

par conséquent

$$\frac{\gamma}{\beta} < g\,,\ \frac{\gamma}{\alpha} < g,$$

et enfin:

$$f(\bar{q}) > \frac{2}{2+g^2}.$$

On a donc l'inégalité:

$$|b'_{\nu_1} - a'_{\nu_1}| < \left(1+\frac{1}{2}g^2\right)\cdot D_{\nu_1\ldots\nu_1}$$

d'où il suit que la série

$$\sum_{\nu_1}\sum|b'_{\nu_1} - a'_{\nu_1}|$$

ou, ce qui est la même chose, la série

$$\sum_{\nu_1 \neq \mu} | b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k} - a_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k} |$$

est convergente.

Or on sait que cela suffit pour conclure que le produit

$$\prod_{\nu_1 \neq \mu} \left(\frac{u - a_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{u - b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}} \right)$$

est uniformément convergent dans tout domaine qui ne renferme pas une infinité des points $a_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}$ et $b_\mu^{\nu_1 \ldots \nu_k}$ ou de leurs points limites. Donc ce produit représente une fonction analytique uniforme.

Nous avons formé le produit dont nous venons de démontrer la convergence en faisant parcourir à μ tous les entiers positifs. Considérons maintenant les produits partiels formés par tous les facteurs de ce produit dont l'indice μ est égal à un nombre donné λ, et désignons par $P_\lambda(u)$ ces produits partiels.

Nous aurons donc:

$$\text{(B)} \qquad P_\lambda(u) = \prod_{\nu_1 \neq \lambda} \frac{u - a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{u - b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}.$$

Voici maintenant comment il est possible de résoudre, à l'aide de cette fonction $P_\lambda(u)$, le problème que nous nous sommes proposé.

Il est aisé de voir que

$$\frac{A_\mu(u) - a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{A_\mu(u) - b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}} = \frac{u - a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k \mu}}{u - b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k \mu}} \cdot \frac{c_\mu - a_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}{c_\mu - b_\lambda^{\nu_1 \ldots \nu_k}}.$$

Nous avons par conséquent:

$$P_\lambda[A_\mu(u)] = P_\lambda(c_\mu) \, . \, P_\lambda(u).$$

En effet, comme il est facile de s'en assurer, le point c_μ est toujours un point régulier de la fonction $P_\lambda(u)$.

Si nous remplaçons encore une fois u par $A_\mu(u)$, nous aurons:

$$P_\lambda(u) = P_\lambda(c_\mu) \, . \, P_\lambda[A_\mu(u)] = [P_\lambda(c_\mu)]^2 P_\lambda(u),$$

d'où

$$P_\lambda(c_\mu) = \pm 1.$$

Quand μ diffère de λ, $P_\lambda(c_\mu)$ est positif et par conséquent égal à l'unité. Si, au contraire, $\mu = \lambda$, un facteur de $P_\lambda(c_\mu)$ est négatif, tandis que tous les autres sont positifs. Donc, dans ce cas $P_\lambda(c_\mu)$ est négatif et a la valeur -1. Dans tous les cas la fonction $[P_\lambda(u)]^2$ se trouve inaltérée par toutes les substitutions $A_{\nu_1 \ldots \nu_k}$.

De ce fait il est aisé de conclure que la fonction $[P_\lambda(u)]^2$ a une valeur réelle sur la circonférence de chaque cercle C_μ. En effet, les valeurs qu'elle prend dans les points symétriques par rapport à l'axe réel doivent être à la fois égales et conjuguées. En outre cette fonction est réelle sur l'axe réel.

Donc la fonction $P_\lambda^2(u)$ est réelle sur tout le contour du domaine U. Sur ce contour elle ne devient infinie que dans le point b_λ. Or il suit de tout cela que la partie imaginaire de notre fonction ne peut s'annuler à l'intérieur de U; car dans ce cas il existerait toujours un domaine tel que cette partie imaginaire aurait une limite supérieure finie à son intérieur et s'annulerait sur son contour.

Donc la fonction $P_\lambda^2(u)$ réalise la représentation conforme du domaine U sur un demi-plan.

En représentant conformément un plan sur lui-même, on peut, comme on le sait, disposer à volonté de trois points. Ainsi notre problème n'est entièrement déterminé qu'après qu'on a fixé les trois points du plan de u qui doivent correspondre à trois points déterminés du plan de la fonction.

Si nous convenons, par exemple, de faire correspondre aux points $u = a_\lambda$ et $u = b_\lambda$ les points $x = \alpha_\lambda$ et $x = \beta_\lambda$ et au point $u = \infty$ le point $x = \infty$, on voit immédiatement que la fonction qui réalise la représentation conforme ainsi définie est donnée par l'équation

$$\frac{x - \alpha_\lambda}{x - \beta_\lambda} = P_\lambda^2(u).$$

Nous sommes donc arrivés à la solution définitive de notre problème.

Mais, avant de finir, je voudrais ajouter quelques mots sur certains problèmes auxquels on est amené par l'étude de la fonction $P_\lambda^2(u)$.

L'équation ci dessus pourrait tout aussi bien s'écrire sous la forme

$$\frac{x - a_\mu}{x - \beta_\mu} = P_\mu^2(u),$$

si on convient de désigner généralement par α_μ, β_μ les points correspondant à a_μ, b_μ. Puisque le point $u = \infty$ est intérieur au domaine U_0, il est aisé de voir que la somme infinie

$$\Sigma \mid \alpha_\nu - \beta_\nu \mid$$

a une valeur finie, et que, par conséquent, le produit infini

$$\prod_\nu \frac{x - a_\nu}{x - \beta_\nu}$$

converge uniformément dans le voisinage de tout point à l'exception des points α_ν, β_ν et de leurs points limites.

Nous savons déjà que le produit

$$y = \Pi_\nu P_\nu(u)$$

est uniformément convergent dans un domaine dont il n'est pas nécessaire de répéter ici la définition.

D'ailleurs nous avons entre les deux fonctions x et y la relation suivante

$$\text{(C)} \qquad y^2 = \left[\prod_\nu P_\nu(u)\right]^2 = \prod_\nu \frac{x - a_\nu}{x - \beta_\nu}.$$

Ainsi nous sommes conduits à une équation transcendante de forme hyperelliptique, où nous pouvons représenter les deux variables comme des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire. Ces fonctions se trouvent inaltérées par une infinité de substitutions linéaires, qui ne peuvent pas être dérivées d'un nombre fini de substitutions fondamentales, mais toutefois d'un système fondamental de substitutions linéaires en nombre infini.

En effet, il est aisé de voir que la fonction y reste inaltérée par chacune des substitutions

$$A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{1n}, \ldots,$$

où n doit parcourir toute la série des nombres entiers, sauf l'unité. La fonction y admet donc le groupe dérivé de ces substitutions fondamentales.

Voyons maintenant quelles sont les propriétés essentielles de la représentation des variables x et y par la variable u. A une valeur arbitraire de x correspond en général une valeur et une seule de u dans le domaine U_0. Dans le domaine U_1, il se trouve une valeur transformée de cette valeur-là par la substitution A_1. A une valeur arbitraire de x correspondent donc en général deux valeurs différentes de u dans le domaine $U_0 + U_1$ formé par l'ensemble de tous les points appartenant soit au domaine U_0, soit au domaine U_1. Pour ces deux valeurs de u, y prend en général des valeurs différentes, parce que les deux valeurs de y correspondant à une certaine valeur de x diffèrent en général pas leurs signes. Par conséquent, si l'on prend un point analytique (x, y) remplissant la relation analytique (C), il y correspondra en général une valeur de u entièrement déterminée dans le domaine $U_0 + U_1$.

Ainsi, la représentation que nous venons de trouver du point analytique (x, y) *à l'aide des fonctions uniformes* $P_\lambda^2(u)$ *et* $\prod_\nu P_\nu(u)$ *satisfait partout aux conditions exigées par M. Weierstrass dans son cours sur les fonctions abéliennes, à l'exception seulement du voisinage des points essentiellement singuliers de la relation analytique* (C).

Tout comme dans le cas où les substitutions fondamentales sont en nombre fini, on est conduit, dans le cas que nous traitons, à une équation linéaire de second ordre qui peut s'intégrer à l'aide de la fonction $P_\lambda^2(u)$. Seulement, dans notre cas, les coefficients de cette équation sont transcendantes, ce dont on s'assure sans difficulté.

Il nous reste encore une question très importante, qui toutefois me semble présenter des difficultés considérables.

Etant donnée une série de paramètres réels α_ν, β_ν, il s'agit de trouver les conditions nécessaires pour que l'on puisse choisir les paramètres a_ν, b_ν, de manière que la fonction x prenne les valeurs α_ν, β_ν dans les points a_ν, b_ν; ou en d'autres termes:

de trouver les conditions nécessaires pour que deux variables x et

y, liées entre elles par une équation de la forme (C), puissent s'exprimer à l'aide des fonctions

$$P_\lambda^2(u) \quad \text{et} \quad \Pi_\nu P_\nu(u);$$

ou encore:

de trouver toutes les équations linéaires de la forme

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \varphi(x)z = 0,$$

qui peuvent s'intégrer à l'aide d'une fonction $P_\lambda^2(u)$, $\varphi(x)$ étant une fonction transcendante à coefficients réels.

Ce qui rend cette question si difficile, c'est que les paramètres α_ν, β_ν et a_ν, b_ν, qui sont liés par des relations d'une nature fort transcendante, se trouvent en nombre infini. On ne peut donc pas avoir recours aux méthodes qu'emploie M. Poincaré dans le cas où les paramètres sont en nombre fini.[1]

[1] Voir Poincaré, *Sur les groupes des équations linéaires.* Acta mathematica, T. 4.

SUR UN THÉORÈME DE M. BRUNS

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

À STOCKHOLM.

Dans son mémoire *De proprietate quadam functionis potentialis corporum homogeneorum*[1] M. BRUNS a démontré le théorème suivant: Soit T un corps solide homogène limité par une surface fermée S, définie par une équation analytique $W(x, y, z) = 0$. Si l'on désigne par V_a la fonction analytique qui coïncide avec le potentiel de T dans chaque point intérieur à ce corps, cette fonction peut être développée dans le voisinage de chaque point régulier x_1, y_1, z_1 de la surface S, en une série de puissances entières et positives de $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$. Il en résulte que cette fonction analytique V_a existe aussi a l'intérieur de T. Pour démontrer ce théorème important M. BRUNS démontre d'abord l'existence d'une fonction analytique U, satisfaisant à l'équation

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4k\pi$$

et jouissant des propriétés suivantes:

1) Sur toute la surface S, on a

$$U = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

2) Dans chaque point régulier de la surface S, U peut être développée suivant les puissances entières et positives de $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$.

[1] Dissertation inaugurale, Berlin 1871.

Dans la note présente je vais m'occuper d'une transformation de l'équation différentielle ΔU en un système de coordonnées curvilignes, qui fait ressortir immédiatement l'existence d'une pareille fonction U.

Soit x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point quelconque de la surface S; ξ, η, ζ les cosinus des angles que la normale extérieure en ce point, s fait avec les axes de x, y, z, et posons

$$x = x_1 + \xi s,$$

$$y = y_1 + \eta s,$$

$$z = z_1 + \zeta s,$$

où la signification géométrique de s est évidente. Les coordonnées x_1, y_1, z_1 de chaque point de la surface S peuvent être représentées comme fonctions analytiques monodromes de deux variables u, v. La surface S n'ayant ni angles ni arêtes, ξ, η, ζ sont aussi des fonctions monodromes de u et de v.

x, y, z sont donc des fonctions monodromes de u, v, s. Le réciproque n'a pas en général lieu. Mais on peut toujours trouver deux surfaces fermées S_1 et S_2 dont l'une enveloppe la surface S et l'autre en est enveloppée, et telles qu'à chaque point de l'espace limité par S_1 et S_2 correspond toujours un, et seulement un système de valeurs u, v, s, dans lequel le module de s ne surpasse pas une certaine quantité positive δ.

Transformons l'expression à différences partielles ΔU dans ces nouvelles coordonnées u, v, s.

La formule bien connue pour cette transformation est la suivante:[1]

Si l'on pose

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Pdu^2 + Qdv^2 + Rds^2 + 2pdvds + 2qduds + 2rdudv,$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \Omega^2 E &= QR - p^2, & \Omega^2 e &= qr - pP, \\ \Omega^2 E_1 &= RP - q^2, & \Omega^2 e_1 &= rp - qQ, \\ \Omega^2 E_2 &= PQ - r^2, & \Omega^2 e_2 &= pq - rR, \end{aligned}$$

[1] Voir JACCBI, Gesammelte Werke, T. 2, p. 199.

on a les relations suivantes

$$\Omega^2 = PQR - Pp^2 - Qq^2 - Rr^2 + 2pqr,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = E\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + E_1\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 + E_2\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)^2$$
$$+ 2e\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial s} + 2e_1\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial s} + 2e_2\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v},$$

$$\Omega\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\Omega\left(E\frac{\partial U}{\partial u} + e_2\frac{\partial U}{\partial v} + e_1\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\Omega\left(e_2\frac{\partial U}{\partial u} + E_1\frac{\partial U}{\partial v} + e\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial s}\left\{\Omega\left(e_1\frac{\partial U}{\partial u} + e\frac{\partial U}{\partial v} + E_2\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}.$$

Il s'agit donc de calculer les valeurs de P, Q, R, p, q, r.

On a

$$dx = dx_1 + sd\xi + \xi ds,$$
$$dy = dy_1 + sd\eta + \eta ds,$$
$$dz = dz_1 + sd\zeta + \zeta ds.$$

ξ, η, ζ étant les cosinus des angles que la normale extérieure au point x_1, y_1, z_1 fait avec les axes des coordonnées, on doit avoir

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$
$$\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0,$$
$$\xi dx_1 + \eta dy_1 + \zeta dz_1 = 0.$$

Par conséquent

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 + 2s(dx_1 d\xi + dy_1 d\eta + dz_1 d\zeta)$$
$$+ s^2(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) + ds^2.$$

En adoptant les désignations de GAUSS,[1] je pose

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = a, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = a', \qquad E = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = b, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial v} = b', \qquad F = aa' + bb' + cc', \qquad \omega = \sqrt{EG - F^2},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = c, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} = c', \qquad G = a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

$$\alpha = \frac{\partial a}{\partial u}, \qquad \alpha' = \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial a'}{\partial u}, \qquad \alpha'' = \frac{\partial a'}{\partial v},$$

$$\beta = \frac{\partial b}{\partial u}, \qquad \beta' = \frac{\partial b}{\partial v} = \frac{\partial b'}{\partial u}, \qquad \beta'' = \frac{\partial b'}{\partial v},$$

$$\gamma = \frac{\partial c}{\partial u}, \qquad \gamma' = \frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial c'}{\partial u}, \qquad \gamma'' = \frac{\partial c'}{\partial v}.$$

On a alors

$$dx_1 = a\,du + a'dv, \qquad dy_1 = b\,du + b'dv, \qquad dz_1 = c\,du + c'dv,$$

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = Edu^2 + 2Fdudv + 2Gdv^2,$$

$$d\xi dx_1 + d\eta dy_1 + d\zeta dz_1 = -(\xi d^2x_1 + \eta d^2y_1 + \zeta d^2z_1);$$

mais

$$d^2x_1 = \alpha du^2 + 2\alpha' dudv + \alpha'' dv^2,$$

$$d^2y_1 = \beta du^2 + 2\beta' dudv + \beta'' dv^2,$$

$$d^2z_1 = \gamma du^2 + 2\gamma' dudv + \gamma'' dv^2,$$

et en posant

$$A = bc' - cb',$$

$$B = ca' - ac',$$

$$C = ab' - ba',$$

on a

$$\xi = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{A}{\omega},$$

$$\eta = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{B}{\omega},$$

$$\zeta = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{C}{\omega}.$$

---

[1] *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

Donc, en posant

$$D = A\alpha + B\beta + C\gamma ,$$

$$D' = A\alpha' + B\beta' + C\gamma' ,$$

$$D'' = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'',$$

on a

$$\xi d^2 x_1 + \eta d^2 y_1 + \zeta d^2 z_1 = \frac{D du^2 + 2D' uv + D'' v^2}{\omega}.$$

Il reste à calculer en u, v l'expression de

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Mais on a

$$d\xi = \frac{(A^2 + B^2 + C^2) dA - A(AdA + BdB + CdC)}{\omega^3},$$

$$d\eta = \frac{(A^2 + B^2 + C^2) dB - B(AdA + BdB + CdC)}{\omega^3},$$

$$d\zeta = \frac{(A^2 + B^2 + C^2) dC - C(AdA + BdB + CdC)}{\omega^3}.$$

Par conséquent

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)(dA^2 + dB^2 + dC^2) - (AdA + BdB + CdC)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}$$

$$= \frac{(BdC - CdB)^2 + (CdA - AdC)^2 + (AdB - BdA)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Mais on a

$$A = bc' - cb' \text{ etc.},$$

$$dA = (b\gamma' + c'\beta - c\beta' - b'\gamma) du + (b\gamma'' + c'\beta' - c\beta'' - b'\gamma') dv \text{ etc.}$$

Par conséquent

$$BdC - CdB = (D'a - Da) du + (D''a - D'a') dv,$$

$$CdA - AdC = (D'b - Db) du + (D''b - D'b') dv,$$

$$AdB - BdA = (D'c - Dc) du + (D''c - D'c') dv.$$

et en posant

$$L = ED'^2 - 2FDD' + GD^2,$$

$$L' = ED'D'' - F(DD'' + D'^2) + GDD',$$

$$L'' = ED''^2 - 2FD'D'' + GD'^2,$$

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{Ldu^2 + 2L'dudv + L''dv^2}{\omega^4}.$$

Tous les éléments qui entrent dans l'expression transformée de $dx^2 + dy^2 + dz^2$ sont maintenant calculés et l'on trouve en posant

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Pdu^2 + Qdv^2 + Rds^2 + 2pdvds + 2qdsdu + 2rdudv,$$

$$P = E - 2s\frac{D}{\omega} + s^2\frac{L}{\omega^4}, \qquad p = 0,$$

$$Q = G - 2s\frac{D''}{\omega} + s^2\frac{L''}{\omega^4}, \qquad q = 0,$$

$$R = 1, \qquad r = F - 2s\frac{D'}{\omega} + s^2\frac{L'}{\omega^4}.$$

En posant donc

$$\Omega^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}^2 = PQR - Pp^2 - Qq^2 - Rr^2 + 2pqs,$$

et en définissant les quantités E, E_1, E_2, e, e_1, e_2 comme plus haut on a

$$\Omega^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left|\Omega\left(E\frac{\partial U}{\partial u} + e_2\frac{\partial U}{\partial v} + e_1\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right|$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left|\Omega\left(e_2\frac{\partial U}{\partial u} + E_1\frac{\partial U}{\partial v} + e\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right|$$
$$+ \frac{\partial}{\partial s}\left|\Omega\left(e_1\frac{\partial U}{\partial u} + e\frac{\partial U}{\partial v} + E_2\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right|.$$

L'équation différentielle transformée $\Delta u = -4k\pi$ prend donc la forme suivante, (vu que $E_2 = 1$)

$$\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + A_1 \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + B_1 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + a_1 \frac{\partial U}{\partial u} + b_1 \frac{\partial U}{\partial v} + c_1 \frac{\partial U}{\partial s} = -4k\pi\Omega^2.$$

Les quantités A_1, B_1, a_1, b_1, c_1 sont, comme on le voit immédiatement, des fonctions entières de second degré en s dont les coefficients sont des fonctions de u et de v qui dans le voisinage de chaque système de valeurs u_0, v_0 correspondant à un point x_1, y_1, z_1 de la surface S peuvent être développées en séries de puissances positives et entières de $u - u_0$, $v - v_0$.

La surface S est représentée dans les coordonnées que nous considérons par l'équation

$$s = 0.$$

La fonction U doit être égale à zéro dans chaque point de cette surface. Il en est de même de toutes ses dérivées de premier ordre.

Si le coefficient Ω de $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ dans l'équation différentielle transformée n'est pas égal à zéro pour aucun système de valeurs u_0, v_0 correspondant à un point de la surface S, il existera une seule fonction U satisfaisant à la condition

$$(U)_{s=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{s=0} = 0,$$

et cette fonction pourra être représentée par une série convergente[1] procédant selon les puissances entières positives de $s, u - u_0, v - v_0$.

Cette fonction sera évidemment celle que nous cherchons. Il faut donc examiner plus attentivement la valeur de Ω.

On a

$$\Omega^2 = PQ - r^2 = \left(E - 2s\frac{D}{\omega} + s^2\frac{L}{\omega^4}\right)\left(G - 2s\frac{D''}{\omega} + s^2\frac{L''}{\omega^4}\right) - \left(F - 2s\frac{D'}{\omega} + s^2\frac{L'}{\omega^4}\right)^2$$

$$= EG - F^2 - \frac{2s}{\omega}(ED'' - 2FD' + GD) + \frac{s^2}{\omega^4}[EL'' - 2FL' + GL + 4\omega^2(DD'' - D'^2)]$$

$$- 2\frac{s^3}{\omega^5}(LD'' - 2L'D' + L''D) + \frac{s^4}{\omega^8}(LL'' - L'^2).$$

[1] Voir mon mémoire *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, Journal für Mathematik, T. 80.

En désignant par ρ_1 et ρ_2 les deux rayons de courbure dans le point de la surface dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1, on a

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{DD'' - D'^2}{\omega^4}, \qquad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{\omega^3}.$$

On trouve de plus facilement les relations suivantes

$$EL'' - 2FL' + GL = (ED'' - 2FD' + GD)^2 - 2(EG - F^2)(DD'' - D'^2),$$

$$LD'' - 2L'D' + L''D = (ED'' - 2FD' + GD)(DD'' - D'^2),$$

$$LL'' - L'^2 = (EG - F^2)(DD'' - D'^2)^2.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de Ω on trouve

$$\begin{aligned}\Omega^2 = \omega^2\Big[1 - 2s\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + s^2\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{4}{\rho_1\rho_2}\right) - \frac{2s^3}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{s^4}{\rho_1^2\rho_2^2}\Big] \\ = \omega^2\left(1 - \frac{s}{\rho_1}\right)^2\left(1 - \frac{s}{\rho_2}\right)^2.\end{aligned}$$

Ni la quantité $\omega = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, ni aucun des deux rayons de courbure ρ_1, ρ_2 ne peuvent être égaux à zéro dans un point de la surface pour lequel la direction de la normale est déterminée. Ω n'est donc point égal à zéro pour aucun système de valeurs s_0, u_0, v_0 tel que le module de s_0 est moindre qu'une certaine quantité δ, et qu'aux valeurs u_0, v_0 corresponde un point x_1, y_1, z_1 de la surface S. $\frac{1}{\Omega}$ peut donc être développé selon les puissances entières positives de $u - u_0$, $v - v_0$, $s - s_0$. Mais au système de valeurs s_0, u_0, v_0 correspond un point x, y, z compris dans l'espace θ limité par les surfaces S_1 et S_2. Vu que dans le voisinage de chacun de ces points les quantités $u - u_0$, $v - v_0$, $s - s_0$ peuvent être développées selon les puissances entières positives de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, la fonction U peut donc aussi être représentée par une série semblable.

C. Q. F. D.

SUR UNE APPLICATION DES DÉTERMINANTS INFINIS A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

HELGE VON KOCH
À STOCKHOLM.

Si les coefficients $P_r(x)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ de l'équation linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n(x) y = 0$$

sont des fonctions analytiques uniformes de la variable x, qui dans le voisinage d'un certain point, par exemple $x = 0$, peuvent être représentées par des séries de Laurent, on sait, d'après les recherches fondamentales de M. FUCHS, qu'il existe au moins une intégrale qui dans le voisinage du dit point peut s'écrire sous la forme

$$y = x^\rho G(x),$$

ρ étant une quantité indépendante de x et $G(x)$ une série de Laurent. Dans le cas particulier où $G(x)$ ne contient qu'un nombre fini de puissances négatives de x, les coefficients de cette série sont donnés par des formules de récursion.[1] Mais dans le cas général, si l'on cherche à déterminer ces coefficients, on obtient un système infini d'équations linéaires. Un tel système a été étudié pour la première fois par M. HILL[2] qui, dans le but d'intégrer une certaine équation différentielle du second ordre, a été conduit à envisager un déterminant d'ordre infini $\square(c)$. Dans un

[1] FUCHS, J. de Crelle T. 66. FROBENIUS, même journal T. 76.

[2] *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon,* Cambridge, Wilson 1877; Acta mathematica T. 8.

mémoire inséré, il y a quelques années, dans le »Bulletin de la Société mathématique de France» (T. 14, p. 77), M. Poincaré a démontré rigoureusement les propriétés de ce déterminant signalées par M. Hill. M. Poincaré y est parvenu à l'aide de deux théorèmes généraux et fort importants sur la convergence des déterminants infinis. On dit qu'un déterminant Δ_n est convergent, si à chaque nombre positif δ correspond un nombre entier n' tel que, quel que soit l'entier positif p, l'inégalité $|\Delta_n - \Delta_{n+p}| < \delta$ ait lieu aussitôt que $n > n'$. En adoptant cette définition, on peut énoncer les théorèmes de M. Poincaré de la manière suivante:

> »Soit Δ_n un déterminant dont tous les éléments de la ligne principale sont égaux à 1. Pour que Δ_n converge, il suffit que la série formée avec tous les éléments qui n'appartiennent pas à la diagonale principale converge absolument».
>
> »Si cette série converge absolument, le déterminant restera convergent, si l'on remplace les éléments d'une ligne quelconque par une suite de quantités qui sont toutes plus petites en valeur absolue qu'un nombre positif donné.»

Sur le conseil de M. Mittag-Leffler, j'ai essayé d'étendre l'usage des invariants infinis à la théorie générale des équations différentielles linéaires et homogènes. Je me propose d'indiquer succinctement, dans les quelques pages qui suivent, les résultats auxquels je suis arrivé.

Etant donnée une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n, on peut toujours, à l'aide d'une transformation bien connue, l'écrire sous la forme suivante:

$$(1) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = 0.$$

Dans cette équation, supposons que les coefficients $P_r(x)$ ($r = 2, 3, \ldots, n$) soient des fonctions analytiques uniformes de x qui, dans le voisinage du point $x = 0$, puissent s'écrire sous la forme

$$P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_{r,\lambda} x^\lambda \qquad (r = 2, 3, \ldots, n)$$

l'égalité ayant lieu pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$R < |x| < R'.$$

On peut toujours supposer que

$$R < 1 < R',$$

car, si cela n'était pas le cas, on pourrait transformer l'équation différentielle donnée par la substitution

$$x = z \cdot \sqrt{RR'}$$

en une autre équation différentielle, pour laquelle cette condition serait remplie.

On sait qu'il existe une série de la forme

$$(2) \qquad y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda x^{\rho+\lambda}$$

qui converge pour chaque point à l'intérieur de l'anneau circulaire (RR') et qui satisfait à l'équation (1). Pour déterminer les quantités g_λ et ρ, introduisons la série (2) dans $P(y)$; posons

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho) &= \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1) \\
&\quad + \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+3)\alpha_{2,-2} + \ldots + \alpha_{n,-n}, \\
A_{m\lambda} &= (\rho+\lambda)(\rho+\lambda-1)\ldots(\rho+\lambda-n+3)\alpha_{2,m-\lambda-2} \\
&\quad + (\rho+\lambda)\ldots(\rho+\lambda-n+4)\alpha_{3,m-\lambda-3} + \ldots + \alpha_{n,m-\lambda-n}, \\
G_m(\rho) &= \varphi(\rho+m)g_m + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' A_{m\lambda} g_\lambda; \qquad (\lambda \neq m)
\end{aligned}$$

on aura

$$(3) \qquad P(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_m(\rho) x^{\rho+m-n}.$$

Il faut donc que les quantités g_λ et ρ satisfassent aux équations en nombre infini:

$$G_m(\rho) = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ou, si l'on pose

$$\psi_{m\lambda}(\rho) = \frac{A_{m\lambda}}{\varphi(\rho+m)} \quad (m \neq \lambda); \quad \psi_{mm} = 1,$$

aux équations

$$\varphi(\rho+m)\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\psi_{m\lambda}(\rho)g_\lambda = 0.$$

Formons maintenant le déterminant infini

$$(4)\qquad \Omega(\rho) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & \psi_{-m,0} & \cdots & \psi_{-m,m} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \psi_{0,-m} & \cdots & 1 & \cdots & \psi_{0,m} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \psi_{m,-m} & \cdots & \psi_{m0} & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Je dis que ce déterminant est convergent; en effet, envisageons la série à double entrée

$$S = \sum_m \sum_\lambda' |\psi_{m\lambda}(\rho)|. \qquad (\lambda \neq m)$$

Ecrivons $m-\nu$ au lieu de λ et posons

$$(\rho+m-\nu)(\rho+m-\nu-1)\ldots(\rho+m-\nu-n+k+1)$$
$$= (\rho+m)^{n-k} + h_1^{(k)}(\nu)(\rho+m)^{n-k-1} + \ldots + h_{n-k}^{(k)}(\nu)$$

où $h_r^{(k)}(\nu)$ est une fonction entière rationnelle en ν de degré r.

On aura alors

$$A_{m,m-\nu} = H_2(\nu)(\rho+m)^{n-2} + H_3(\nu)(\rho+m)^{n-3} + \ldots + H_n(\nu)$$

où

$$H_2(\nu) = \alpha_{2,\nu-2}; \qquad H_3(\nu) = h_1^{(2)}(\nu)\alpha_{2,\nu-2} + \alpha_{3,\nu-3}; \;\ldots$$
$$H_r(\nu) = h_{r-2}^{(2)}(\nu)\alpha_{2,\nu-2} + h_{r-3}^{(3)}(\nu)\alpha_{3,\nu-3} + \ldots + \alpha_{r,\nu-r},$$

d'où l'on conclut:

$$(5)\qquad \begin{aligned} |\psi_{m,m-\nu}(\rho)| &\leqq \left|\frac{(\rho+m)^{n-2}}{\varphi(\rho+m)}\right| |H_2(\nu)| \\ &+ \left|\frac{(\rho+m)^{n-3}}{\varphi(\rho+m)}\right| |H_3(\nu)| + \ldots + \left|\frac{1}{\varphi(\rho+m)}\right| |H_n(\nu)|. \end{aligned}$$

Le point $x = 1$ étant situé à l'intérieur de (RR'), les séries

$$S_r = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |H_r(\nu)| \qquad (r=2,3,\ldots,n)$$

sont évidemment convergentes ce qui nous permet d'écrire

$$(6) \quad \begin{aligned} S \leqq S_2 \sum\nolimits_m \left|\frac{(\rho+m)^{n-2}}{\varphi(\rho+m)}\right| + S_3 \sum\nolimits_m \left|\frac{(\rho+m)^{n-3}}{\varphi(\rho+m)}\right| + \ldots \\ \ldots + S_n \sum\nolimits_m \left|\frac{1}{\varphi(\rho+m)}\right|. \end{aligned}$$

Mais de là on conclut que la série S converge, pourvu que ρ ne soit racine d'aucune des équations

$$(7) \qquad \varphi(\rho+m) = 0. \qquad (m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

En vertu du theoréme de M. Poincaré, on peut donc affirmer que le déterminant $\Omega(\rho)$ est *convergent.*

Considérons maintenant la quantité $\rho = u + iv$ comme un point variable du plan; soit B une aire finie ou infinie située tout entière entre deux droites verticales et telle qu'aucune des racines des équations (7) ne se trouve en dedans ou sur la limite de B. On démontre aisément que les séries qui se trouvent dans le second membre de l'inégalité (6) sont uniformément convergentes dans B. Il en est donc de même du produit

$$\prod\nolimits_m (1 + \Sigma'_\lambda |\psi_{m\lambda}|)$$

ce qui nous permet de le développer en une série uniformément convergente. Soit Σ cette série, le produit

$$\prod\nolimits_m (1 + \Sigma'_\lambda \psi_{m\lambda})$$

pourra s'écrire comme une série uniformément et absolument convergente Σ_1, dont aucun terme n'excède en valeur absolue le terme correspondant de Σ. Dans la série Σ_1, remplaçons certains termes par zéro et multiplions les autres, suivant les cas, par $+1$ ou -1. La série Σ_2 ainsi obtenue représentera $\Omega(\rho)$. Et, comme aucun terme de Σ_2 ne peut être plus grand en valeur absolue que le terme correspondant de Σ, cette série Σ_2 est aussi uniformément et absolument convergente en dedans

de B. Soit ρ_0 un point quelconque de B, la fonction $\Omega(\rho)$, d'après un theorème bien connu, pourra s'écrire dans le voisinage de ρ_0 sous la forme

$$\Omega(\rho) = \mathfrak{P}(\rho - \rho_0),$$

$\mathfrak{P}(\rho - \rho_0)$ étant une série ordonnée suivant les puissances entières positives de $\rho - \rho_0$. Donc $\Omega(\rho)$ est une fonction analytique de ρ qui se comporte regulièrement dans l'entourage de chaque point du plan à l'exception des points qui satisfont aux équations (7). De plus, il est facile de voir que dans le voisinage de chacun de ces derniers points $\Omega(\rho)$ a le caractère d'une fonction rationelle. Puisqu'on peut supposer que le domaine B s'étend infiniment dans la direction de l'axe imaginaire, on aura, en faisant croître la partie imaginaire de ρ au delà de toute limite, une égalité de la forme suivante:

$$\lim_{v=\pm\infty} \Omega(\rho) = 1.$$

Remarquons maintenant que $\Omega(\rho)$ est une fonction périodique de ρ; en effet, changeons ρ en $\rho + 1$, l'égalité

$$\psi_{m\lambda}(\rho + 1) = \psi_{m+1,\lambda+1}(\rho)$$

nous apprend que la valeur de $\Omega(\rho)$ n'est pas changée. Donc, la fonction $\Omega(\rho)$ a la période 1, et il est évident qu'elle ne peut en avoir d'autre. En vertu des propriétés du déterminant $\Omega(\rho)$ que nous venons de démontrer, il est clair que nous pouvons le représenter sous la forme d'une fonction linéaire des quantités $\operatorname{cotang}(\rho - \rho_\lambda)\pi$ et de leurs derivées,[1] $\rho_1, \rho_2, \ldots$ étant certaines racines de l'équation

$$\varphi(\rho) = 0. \tag{8}$$

En particulier, supposons que toutes les racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ de cette équation soient inégales et qu'elles ne diffèrent pas par des nombres entiers. Dans l'entourage de $\rho = \rho_\lambda$ on aura

$$\Omega(\rho) = \frac{M_\lambda}{\rho - \rho_\lambda} + \mathfrak{P}_\lambda(\rho - \rho_\lambda), \tag{9}$$

[1] Voir p. ex. Cours de M. Hermite, professé à la Faculté des sciences de Paris, le 2e semestre 1881—82, 3me édition, p. 104.

et, par conséquent, la fonction $\Omega(\rho)$ pourra être mise sous la forme

$$\Omega(\rho) = M + \pi \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi.$$

Faisons croitre la partie imaginaire de ρ une fois vers $+\infty$, l'autre fois vers $-\infty$, on obtiendra les deux égalités qui suivent:

$$1 = M - \pi i \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda; \qquad 1 = M + \pi i \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda$$

ou

$$M = 1; \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda = 0.$$

Posons

$$e^{2\pi i \rho} = \omega; \qquad e^{2\pi i \rho_\lambda} = \omega_\lambda;$$

on aura enfin

$$(10) \qquad \Omega(\rho) = 1 + \pi \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi = 1 + 2\pi i \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{M_\lambda \omega_\lambda}{\omega - \omega_\lambda}.$$

En vertu de la convergence du produit $\prod_m (1 + \sum_\lambda |\psi_{m\lambda}|)$, nous pouvons développer $\prod_m (1 + \sum_\lambda \psi_{m\lambda})$ suivant les éléments d'un facteur quelconque:

$$\prod_m (1 + \sum_\lambda \psi_{m\lambda}) = \sum_\lambda \psi_{m\lambda} \Phi_{m\lambda}$$

ce qui nous permet de développer le déterminant $\Omega(\rho)$ suivant les eléments d'une ligne quelconque. Soit $\Psi_{m\lambda}(\rho)$ le coefficient de $\psi_{m\lambda}(\rho)$ dans le développement de $\Omega(\rho)$ suivant les éléments de la ligne numérotée m, de sorte que

$$(11) \qquad \Omega(\rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda}(\rho) \Psi_{m\lambda}(\rho).$$

En changeant ρ en $\rho + 1$ $\Omega(\rho)$ ne change pas, mais la fonction $\psi_{m\lambda}(\rho)$ devient $\psi_{m+1,\lambda+1}(\rho)$ et en même temps $\Psi_{m\lambda}(\rho)$ devient $\Psi_{m+1,\lambda+1}(\rho)$, ce qui peut s'exprimer par la relation

$$(12) \qquad \Psi_{m\lambda}(\rho + p) = \Psi_{m+p,\lambda+p}(\rho),$$

où p désigne un nombre entier quelconque.

Remarquons maintenant que le déterminant $\Omega(\rho)$ restera convergent, si l'on remplace les éléments d'une ligne par les éléments correspondants d'une autre ligne; le noveau déterminant ainsi obtenu est nécessairement nul, puisque deux lignes sont identiques; on est donc conduit aux égalités

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda}(\rho)\,\Psi_{\varkappa\lambda}(\rho) = 0 \tag{13}$$

les nombres entiers $\varkappa$ et m n'étant assujettis qu'à la seule condition $m \neq \varkappa$.

Par un raisonnement parfaitement analogue, on obtient les identités

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda}(\rho)\,\Psi_{m\varkappa}(\rho) = 0. \qquad (\lambda \neq \varkappa)$$

En vertu de (11), (13) et (3), il est clair qu'en posant

$$y(x, \rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Psi_{p\lambda}(\rho)\,x^{\rho+\lambda}, \tag{14}$$

la série $y(x, \rho)$, pourvu qu'elle converge, représentera une intégrale de l'équation différentielle

$$P(y) = \varphi(\rho + p)\,\Omega(\rho)\,x^{\rho+p-n}. \tag{15}$$

Pour démontrer la convergence de $y(x, \rho)$, remarquons en premier lieu qu'on obtient cette série en remplaçant les éléments de la ligne numérotée p du déterminant $\Omega(\rho)$, savoir,

$$\ldots,\ \psi_{p,-m}(\rho),\ \psi_{p,-m+1}(\rho),\ \ldots,\ \psi_{p0}(\rho),\ \ldots,\ \psi_{p,m-1}(\rho),\ \psi_{p,m}(\rho),\ \ldots$$

par les quantités

$$\ldots,\ x^{\rho-m},\ x^{\rho-m+1},\ \ldots,\ x^{\rho},\ \ldots,\ x^{\rho+m-1},\ x^{\rho+m},\ \ldots.$$

Dans le nouveau déterminant ainsi défini, multiplions la colonne numérotée m par x^{-m} et la ligne numérotée m par x^m et donnons au nombre m successivement les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ La valeur du déterminant n'est évidemment pas altérée, mais les éléments de la ligne numérotée p sont maintenant tous égaux à $x^{\rho+p}$ et ceux d'une ligne numérotée m sont

$$\ldots,\ \psi_{m,-m}(\rho)x^{2m},\ \psi_{m,-m+1}(\rho)x^{2m-1},\ \ldots,\ \psi_{m0}(\rho)x^{m},\ \ldots,\ \psi_{m,m-1}(\rho)x,\ 1,\ \ldots.$$

Pour établir la convergence, il suffit d'observer qu'en vertu de (5) on a l'inégalité

$$|\psi_{m,m-\nu}(\rho)x^\nu| \leqq \left|\frac{(\rho+m)^{n-2}}{\varphi(\rho+m)}\right| |H_2(\nu)x^\nu|$$
$$+\left|\frac{(\rho+m)^{n-3}}{\varphi(\rho+m)}\right| |H_3(\nu)x^\nu| + \ldots + \left|\frac{1}{\varphi(\rho+m)}\right| |H_n(\nu)x^\nu|$$

et que les séries

$$\sum_{\nu=+\infty}^{+\infty} |H_r(\nu)x^\nu| \qquad (r=2,3,\ldots,n)$$

convergent en dedans de l'anneau circulaire (RR'). On en conclut que la série

$$\Sigma_m \Sigma_\lambda |\psi_{m\lambda}(\rho)x^{m-\lambda}| \qquad (m \neq \lambda)$$

converge dans (RR') ce qui nous montre enfin qu'il en est de même du déterminant considéré, c'est-à-dire de la série $y(x, \rho)$; par conséquent, $y(x, \rho)$ est une intégrale de l'équation (15). Pour que cette série satisfasse à l'équation (1), il faut et il suffit que la quantité ρ soit choisie de sorte que

$$\varphi(\rho+p)\Omega(\rho) = 0. \tag{16}$$

Supposons maintenant qu'aucune des quantités M_λ définies par (9) ne soit égale à zéro. Dans ce cas, l'équation (16) aura les mêmes racines que l'égalité

$$\Omega(\rho) = 0. \tag{17}$$

Soit ρ' une racine de cette dernière équation, il est évident que $y(x, \rho')$ est une intégrale de l'équation différentielle donnée. Soit ρ' une racine *simple* de l'équation (17), je dis qu'il est impossible que toutes les fonctions $\Psi_{m\lambda}(\rho)$ s'évanouissent pour $\rho = \rho'$. En effet, si l'on pose

$$\Pi = \Pi_m[1 + \Sigma'_\lambda \psi_{m\lambda}(\rho)]$$

les quantités $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \psi_{m\lambda}}$ ne peuvent pas dépasser en valeur absolue une certaine

limite, et la série $\sum_m \sum_\lambda \psi'_{m\lambda}(\rho)$ étant absolument et uniformément convergente pour tous les points de B, il s'ensuit que l'égalité

$$\frac{d\Pi}{d\rho} = \sum_m \sum_\lambda \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{m\lambda}} \psi'_{m\lambda}$$

a lieu et que la série du second membre converge absolument et uniformément. Développons maintenant le produit Π en une série Σ_1, puis, remplaçons certains termes de Σ_1 par zéro et multiplions les autres par $+1$ ou -1, de sorte que Σ_1 devienne $\Omega(\rho)$, nous obtiendrons:

$$\frac{d\Omega(\rho)}{d\rho} = \sum_m \sum_\lambda \frac{\partial \Omega(\rho)}{\partial \psi_{m\lambda}(\rho)} \psi'_{m\lambda}(\rho),$$

l'égalité ayant lieu pour tous les points réguliers de la fonction analytique $\Omega(\rho)$. Mais de là on conclut qu'il est impossible que toutes les fonctions

$$\frac{\partial \Omega(\rho)}{\partial \psi_{m\lambda}(\rho)} = \Psi_{m\lambda}(\rho)$$

s'évanouissent pour $\rho = \rho'$.

Il est donc possible de choisir l'indice p des fonctions $\Psi_{p\lambda}(\rho)$ $(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ de manière que la série $y(x, \rho)$ définie par (14) ne se réduise pas identiquement à zéro pour $\rho = \rho'$. On peut alors dire en employant la terminologie de M. Fuchs, que *l'intégrale $y(x, \rho')$ appartient à la racine $\rho = \rho'$.*

Enfin, supposons que la fonction périodique $\Omega(\rho)$ ait n zéros incongruents:

$$\rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^n.$$

D'après ce qui vient d'être établi, il est toujours possible de choisir l'indice p_r des fonctions

$$\Psi_{p_r\lambda}(\rho) \qquad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

de façon que la série

$$y_r(x, \rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Psi_{p_r\lambda}(\rho) x^{\rho+\lambda}$$

ne se réduise pas identiquement à zéro pour $\rho = \rho^r$. Posons

$$Y(x, \rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Psi_{0,\lambda}(\rho) x^{\rho+\lambda}$$

on obtiendra, en vertu de (12), l'égalité suivante:

$$y_r(x, \rho) = Y(x, \rho + p_r) \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

d'où l'on conclut que *les fonctions*

$$Y(x, \rho^1 + p_1), \; Y(x, \rho^2 + p_2), \; \ldots, \; Y(x, \rho^3 + p_n)$$

forment un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle donnée.

Dans ce qui précède, j'ai fait trois suppositions:

1° que les racines de l'équation (8) soient inégales et qu'elles ne diffèrent pas par des nombres entiers;

2° qu'aucun des résidus $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ne soit égal à zéro;

3° que $\Omega(\rho)$ ait n zéros incongruents.

Je me propose de revenir une autre fois au cas où l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas remplie.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

LES SÉRIES EMPLOYÉES DANS LES THÉORIES DES PLANÈTES

PAR

HUGO GYLDÉN

À STOCKHOLM.

Préliminaires.

Dans le présent travail je me suis proposé de continuer les recherches sur la convergence des séries employées dans l'astronomie pour représenter les coordonnées des planètes que j'ai publiées dans les Acta mathematica, t. 9, de les amplifier par de nouvelles considérations et de leur donner toute la généralité nécessaire dont ne jouissaient pas encore les résultats obtenus précédemment.

Dans le mémoire cité plus haut (*Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden*) on a examiné avec soin les méthodes d'intégration relatives à une certaine équation différentielle du second ordre qui se présente fréquemment dans la mécanique céleste. Cette équation n'étant pas linéaire au début, le devient toutes les fois qu'on néglige les termes dépendant de la troisième puissance de la force perturbatrice, ainsi que les termes d'un ordre plus élevé. Mais il paraît indispensable d'éviter cette forme dès le commencement du calcul, car bien que l'on n'ait pas démontré directement l'impossibilité de parvenir à la solution absolue en négligeant les termes du troisième ordre dans la première approximation, des tentatives stériles et réitérées, même dans les derniers temps, ont rendu cependant extrêmement probable que la solution absolue ne s'obtiendra pas en uti-

lisant exclusivement des équations linéaires. D'un autre côté, en employant, dans les diverses approximations, des équations différentielles renfermant certains termes des ordres supérieurs, on a obtenu des développements purement trigonométriques, où les coefficients contenant des diviseurs évanouissants ont disparu. On conclut de là que les séries renfermant des termes très grands à cause de petits diviseurs, et qui peuvent être divergentes, ne proviennent pas inévitablement de ce qu'on a admis la forme trigonométrique, mais qu'elles tiennent à la supposition vicieuse qu'on puisse toujours ordonner les approximations successives suivant les puissances des forces troublantes. En effet, si dans la première approximation on n'a retenu que les termes du premier ou du second ordre, on a eu recours pour les diviseurs à un mode de développement qui cesse d'être légitime dans certains cas exceptionnels où se présentent les plus grandes difficultés. Que les séries ainsi obtenues deviennent divergentes, il n'y a pas lieu de s'en étonner. Et puis, les diverses approximations ne donnant pas, dans les cas difficiles, des résultats qui s'approchent de plus en plus d'une limite déterminée, et les résultats obtenus dans chacune d'elles ne se présentant pas toujours sous la forme d'une série trigonométrique convergente, on ne saurait rien décider sur la forme analytique du résultat demandé. Mais il est aussi évident que, si l'on trouve, par une approximation quelconque, un développement divergent, cela ne prouve en aucune façon la divergence du résultat définitif.

Considérons le cas de deux planètes se mouvant autour du soleil.

Les arguments dont on se sert en développant la fonction perturbatrice sont originairement au nombre de six, pourvu qu'on les compte à partir de directions fixes. Comme arguments primitifs on peut adopter les angles suivants: les longitudes des deux planètes comptées à partir de directions fixes dans les plans des orbites instantanées; les longitudes des périhélies comptées comme les longitudes des planètes, et enfin les angles compris entre la ligne d'intersection des deux plans et les directions fixes. Ce sont là les arguments principaux ou les éléments dont se composent les arguments des divers termes du développement. Mais ces éléments n'entrent dans les divers arguments que de manière à se réduire toujours à quatre. On serait d'abord porté à attribuer une grande importance à ce fait. Cependant les entiers par lesquels sont multipliés ces quatre éléments dans les arguments des divers termes ne sont pas

indépendants entre eux: au contraire, ils sont soumis à une condition telle que le nombre des termes du développement ne pourrait pas être altéré en employant les quatre éléments au lieu des six éléments primitifs. La considération des arguments, en tant qu'ils sont composés de quatre éléments, n'ayant pas une importance fondamentale pour la représentation analytique des perturbations peut cependant devenir de quelque utilité pour certaines recherches spéciales.

Les arguments de l'espèce que je viens de signaler, seront appelés *arguments astronomiques* et je désignerai aussi par ce nom toute fonction linéaire de ces éléments et même plus généralement, toute fonction égale à un argument astronomique augmenté de termes dépendant eux-mêmes d'arguments astronomiques. Ainsi l'anomalie vraie étant un argument astronomique, l'anomalie moyenne et l'anomalie excentrique le sont aussi.

Admettons que le mouvement d'une planète soit stable, c'est à dire que l'orbite parcourue par le mobile soit toujours située dans l'espace entre deux surfaces sphériques et concentriques; alors le temps s'exprime le plus souvent au moyen des arguments astronomiques. Dans un tel cas, il serait facile d'établir les relations en vertu desquelles on exprimerait aisément tous les arguments astronomiques au moyen d'un seul d'eux multiplié pas des nombres irrationnels. Ainsi l'anomalie vraie de la planète troublante multipliée par le rapport des mouvements anomalistiques des deux planètes serait aussi un argument astronomique, car la différence entre ce produit et l'anomalie vraie de la planète troublée est composée d'une constante et de termes périodiques dépendant d'arguments astronomiques.

Mais il peut arriver — quoique ce cas soit bien rare dans la nature d'après ce que nous savons — qu'on ne puisse pas exprimer le temps au moyen des arguments astronomiques seuls. Lorsqu'un tel cas se présente il existe toujours une relation linéaire entre les mouvements, en vertu de laquelle la somme de ces mouvements multipliés chacun par un entier convenable disparaît ou prend une valeur constante. A l'aide d'une telle relation un des arguments peut être éliminé et remplacé par une combinaison convenable des autres. Mais en revanche on voit naître, dans la relation qui lie le temps aux arguments astronomiques, une nouvelle inégalité dont le coefficient est une arbitraire et dont l'argument est une anomalie, ou bien le temps multiplié par un nombre

irrationnel, de sorte que la différence entre le nouvel argument et un argument astronomique quelconque contiendra toujours une partie séculaire.

Cette inégalité dont la présence est bien rare dans notre système planétaire a reçu le nom de *libration*. En considérant, d'une manière plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici dans les traités de mécanique céleste, le terme de la fonction perturbatrice d'où pourrait ressortir la libration, on voit que l'inégalité correspondante s'exprime au moyen des fonctions elliptiques. Dans le cas d'un module plus petit que l'unité les arguments astronomiques n'éprouvent aucune altération, mais dans le cas où les observations font ressortir la valeur du module plus grande que l'unité, la nouvelle inégalité dépendant d'un argument non-astronomique se trouve introduite.

Dans le cas intermédiaire où le module est exactement égal à l'unité les fonctions elliptiques ne se développent pas en séries trigonométriques. Alors on ne saurait éviter les exponentielles; mais dans les expressions des inégalités ces fonctions entrent de telle façon que leur influence se borne à introduire, dans les coefficients, une partie variable dont la valeur tend vers une limite déterminée, lorsque la variable indépendante acquiert des valeurs très grandes positives ou négatives. Donc on peut appeler les termes renfermant des exponentielles: *termes asymptotiques*.

Toutes les fois qu'un terme de la fonction perturbatrice pourrait engendrer une inégalité dépendant d'un argument non astronomique ou bien une inégalité ordinaire dont le coefficient serait très grand, il est indispensable, pour avoir tout d'abord un résultat suffisamment approché, d'éviter tout développement suivant les puissances de cette inégalité et d'en tenir compte en faisant le calcul des inégalités dues aux autres termes de la fonction perturbatrice.

C'était par ces considérations que j'avais proposé dans les Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris,[1] d'opérer le calcul des perturbations moyennant une équation de Lamé (dont l'intégrale a été trouvée par M. Hermite). Conformément aux trois cas principaux: celui des arguments astronomiques, celui de la libration et enfin le cas asymptotique, l'équation dont il s'agit prend trois formes différentes que j'ai mises en évidence. Nulle doute qu'on ne puisse dans les cas qui se pré-

---

[1] T. 92, 1881.

sentent le plus souvent, effectuer le calcul des inégalités au moyen des formules qui en résultent; mais il y a des exceptions que je vais signaler.

Supposant les mouvements moyens tels qu'il y a lieu de présumer le cas d'une libration ou bien d'une très grande inégalité provenant d'un certain terme de la fonction perturbatrice, je désigne un tel terme par le nom de *terme critique*. Quelquefois il peut se présenter, dans le développement de la dite fonction, l'apparence d'une infinité de termes critiques, pourvu qu'on les considère séparément sans tenir compte des autres. Cela étant, l'emploi de l'équation de Lamé ne conduit pas immédiatement à des résultats d'où la convergence absolue puisse être aisément déduite, surtout si l'on est amené à considérer simultanément plusieurs planètes troublantes; mais on peut toujours y opérer une transformation telle qu'on aura une nouvelle équation tout à fait semblable à celle qui donne naissance aux premières fonctions elliptiques et à la première équation de Lamé, cette nouvelle équation étant délivrée du premier terme critique. En appliquant au résultat ainsi obtenu les procédés au moyen desquels on a éliminé le premier terme critique, on aura un nouveau système de fonctions elliptiques et une nouvelle équation de Lamé. On pourrait continuer l'intégration proposée et l'on parviendrait à éliminer ainsi, de proche en proche, les termes critiques; de sorte que le reste des termes de la fonction perturbatrice deviendrait de plus en plus insensible.

Mais du fait que la somme des termes omis dans la fonction perturbatrice est insensible on ne peut pas toujours démontrer la valeur insensible de la somme des inégalités qui leur correspondent, ce qui serait le but de nos recherches. Pour faire voir que la valeur dont il s'agit reste très petite il faut montrer que, même si les termes négligés, considérés séparément, donneraient lieu à des inégalités sensibles, l'influence mutuelle des diverses inégalités empêche l'agrandissement, hors d'une certaine limite, des inégalités résultant des termes lointains dans le développement de la fonction perturbatrice.

Que les inégalités dont nous avons parlé restent très petites toutes les fois qu'il ne s'agit que des termes non-élémentaires, cela se comprend en vertu des recherches contenues dans mon mémoire déjà cité. Il suit de là la convergence des séries employées dans le cas d'une orbite intermédiaire, en désignant par ce mot une orbite telle que les expressions des coordonnées sont dépourvues de tout terme élémentaire, et que les

inégalités s'expriment au moyen de deux arguments. L'intégration de l'équation différentielle d'où se tire la longitude dans l'orbite ou bien la réduction du temps, mais modifiée de manière à ne contenir que deux arguments, a été étudiée soigneusement dans la troisième partie de mon mémoire de 1887. Cependant certains points de cette étude n'étant pas mis en plein jour autant qu'on pourrait le désirer, on va trouver, dans les pages suivantes, quelques additions y relatives.

On reconnait aisément que l'orbite intermédiaire coïncide avec l'orbite vraie toutes les fois qu'on peut négliger la masse de la planète troublée et l'excentricité de la planète troublante, ainsi que l'inclinaison mutuelle des deux orbites.

Quant au cas le plus général parmi ceux qui ont été traités dans mon mémoire précédent, je n'ai pas pu constater jusqu'à présent, d'autre objection essentielle à faire au principe de la méthode d'intégration adoptée que celle d'une assez grande prolixité relativement à l'application. Il me faut toutefois avouer que j'y ai adopté comme légitime un procédé dont l'usage général a été admis par Le Verrier, mais dont la portée n'a pas encore été étudiée soigneusement. Il s'agit d'obtenir l'intégrale d'un produit de deux facteurs dont l'un est fonction seulement des termes élémentaires mais l'autre dépend des longitudes des planètes, et il y a lieu de supposer que cette intégrale s'obtienne au moyen des quadratures par parties. Il est cependant possible que la portée de la méthode dont je viens de parler soit restreinte à une exactitude limitée, mais dans ce cas il serait facile d'intercaler un procédé supplémentaire à l'aide duquel le résultat demandé s'obtiendrait en toute rigueur.

Quoi qu'il en soit, une nouvelle méthode plus efficace que ne l'est celle qu'on a employée dans le mémoire de 1887, serait évidemment à désirer. C'est l'exposition d'une telle méthode qu'on va lire dans les pages suivantes; on va encore reconnaître quelques propriétés de la théorie des inégalités, qui ont échappé aux recherches précédentes mais qui sont d'une importance considérable.

Enfin, la partie de la relation entre le temps et les arguments astronomiques qui contient des termes élémentaires, et qui ne s'obtient pas toujours au moyen de l'ancienne méthode, peut être déterminée exactement à l'aide des nouveaux procédés.

Quelquefois, pour m'exprimer plus brièvement, j'ai marqué la concordance entre deux quantités A et B par rapport à l'ordre de grandeur en employant la notation

$$A \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} B.$$

Ainsi la comparaison

$$A \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \varepsilon^n$$

signifie que

$$\frac{A}{\varepsilon^n}$$

est toujours, même pour des valeurs évanouissantes de ε, un nombre fini, pas très grand, ni très petit, ou bien une quantité de l'ordre zéro.

Après ces préliminaires nous passons à l'exposition des nouvelles recherches.

CHAPITRE I.

L'intégration d'une équation différentielle du deuxième ordre et du troisième degré avec un terme tout connu.

§ 1. *Application de la méthode des coefficients indéterminés.*

1. L'équation différentielle du second ordre dont l'intégration donne le rayon-vecteur est très compliquée, du moins si l'on n'a pas négligé tous les termes du degré supérieur au premier. Il n'est pas, cependant, permis d'omettre toujours les termes de degré supérieur afin de réduire ainsi l'équation proposée en une équation linéaire: il faut, au contraire, dès les premiers pas, retenir certains termes du troisième degré, sinon, le résultat d'intégration peut se présenter sous la forme d'une série divergente.

Mais l'équation dont il s'agit, et dont l'étude est très épineuse, peut être, toutefois, décomposée en une suite d'équations plus simples, de sorte qu'on aura le résultat demandé au moyen d'approximations successives dont la convergence est comparable à celle d'une série ordonnée suivant les puissances d'une quantité plus petite que l'unité.

L'équation la plus simple qui nous pourrait servir comme point de départ, est celle-ci:

$$(1) \qquad \frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho - \beta_3\rho^3$$

$$= -\gamma_1 \cos[(1 - \sigma_1)v - B_1] - \gamma_2 \cos[(1 - \sigma_2)v - B_2] - \ldots$$

où les coefficients β_1, β_3, σ_1, σ_2, ... sont de petites quantités de l'ordre des forces troublantes, tandis que les γ sont des coefficients du même ordre mais multipliés encore par des puissances et produits des excentricités et des inclinaisons mutuelles, de sorte qu'ils forment une série dont la convergence est uniforme.

On serait porté a croire que le terme du troisième degré puisse être omis. Cherchons ce qui en résulterait.

On aurait d'abord, en désignant par $\varkappa$ et par Γ les arbitraires de l'intégration,

$$(2) \quad \rho = \varkappa \cos[(1 - \varsigma)v - \Gamma] + \frac{\gamma_1}{\beta_1 - 2\sigma_1 + \sigma_1^2} \cos[(1 - \sigma_1)v - B_1] + \ldots$$

où le coefficient ς est déterminé par la relation

$$1 - \varsigma = \sqrt{1 - \beta_1}.$$

Tant que les différences

$$\beta_1 - 2\sigma + \sigma^2$$

sont des quantités du même ordre que β_1, l'expression de ρ que nous venons de trouver reste nécessairement convergente, et on peut toujours en considérer la valeur comme très petite de l'ordre des excentricités, pourvu que la valeur de l'arbitraire $\varkappa$ soit elle-même très petite. Dans ce cas le terme $\beta_3\rho^3$ serait du troisième ordre par rapport aux excentricités, et on obtiendrait, par la voie des approximations successives, la correction à ajouter à l'expression (2) due à ce terme.

Mais il peut aussi arriver que, parmi les dénominateurs de l'expression (2), il s'en trouve un ou plusieurs ou même un nombre infini, qui s'approchent tellement de zéro que les coefficients qui en dépendent deviennent très grands, ce qui entraîne des valeurs exagérées ou même infinies de la fonction ρ, telle que nous l'avons exprimée au moyen de l'équation (2). On s'aperçoit de là qu'on n'est plus autorisé à admettre, dans le cas envisagé, ni la convergence de la série (2), ni la réussite des approximations indiquées. La raison en est la prépondérance du terme négligé toutes les fois qu'un diviseur devient très petit. Pour avoir une expression effectivement approchée de l'intégrale de l'équation (1), il nous faut donc une méthode d'intégration qui fasse, déjà dans la première approximation, contribuer au résultat le terme dépendant de β_3. Mais ce terme étant retenu, l'intégration dont il s'agit devient très épineuse; il convient donc à commencer par l'étude d'une équation un peu simplifiée. Or, on a supposé, dans l'équation (1), tous les coefficients γ_1 à l'exception d'un seul, égaux à zéro.

La méthode d'intégration qui se présente d'abord est celle des coefficients indéterminés. Certes, l'équation proposée étant du troisième degré, les équations de condition au moyen desquelles se déterminent les inconnues le seront aussi, d'où il est visible que le calcul des coefficients deviendrait extrêmement pénible; cependant, l'emploi de la méthode dont j'ai parlé nous dévoilera très facilement quelques propriétés importantes de l'intégrale.

2. Admettons dans l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho - \beta_3\rho^3 = -\gamma\cos[(1-\sigma)v - B] \tag{3}$$

la fonction ρ décomposée en deux parties, de sorte qu'on ait:

$$\rho = \rho_0 + R,$$

et que la fonction ρ_0 soit exprimée par les deux termes:

$$\rho_0 = \varkappa\cos f + \varkappa_1\cos f_1,$$

où l'on a écrit, pour abréger,

$$f = (1-\varsigma)v - \Gamma; \qquad f_1 = (1-\sigma)v - B.$$

De l'expression adoptée de ρ_0 nous tirons d'abord:

$$\rho_0^3 = \left[\frac{3}{4}\varkappa^2 + \frac{3}{2}\varkappa_1^2\right]\varkappa\cos f + \left[\frac{3}{2}\varkappa^2 + \frac{3}{4}\varkappa_1^2\right]\varkappa_1\cos f_1$$

$$+ \frac{3}{4}\varkappa^2\varkappa_1\cos(2f - f_1) + \frac{3}{4}\varkappa\varkappa_1^2\cos(f - 2f_1)$$

$$+ \frac{3}{4}\varkappa^2\varkappa_1\cos(2f + f_1) + \frac{3}{4}\varkappa\varkappa_1^2\cos(f + 2f_1)$$

$$+ \frac{1}{4}\varkappa^3\cos 3f + \frac{1}{4}\varkappa_1^3\cos 3f_1.$$

Après avoir introduit cette expression de ρ_0^3 dans l'équation (3), nous allons déterminer les inconnues $\varkappa_1$ et ς de manière à faire disparaître les coefficients de $\cos f$ et de $\cos f_1$. En désignant par $\frac{1}{2}(R^2)$ la partie constante de R^2, il en résulte les équations de condition:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &-(1-\varsigma)^2 + (1-\beta_1) + \frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2 - \frac{3}{2}\beta_3[\varkappa^2 + \varkappa_1^2 + (R^2)] = 0,\\ &-(1-\sigma)^2 + (1-\beta_1) + \frac{3}{4}\beta_3\varkappa_1^2 - \frac{3}{2}\beta_3[\varkappa^2 + \varkappa_1^2 + (R^2)] = -\frac{\gamma}{\varkappa_1},\end{aligned}\right.$$

et l'équation du second ordre qui sert à déterminer la fonction R sera:

$$(5)\qquad \frac{d^2R}{dv^2} + (1 - \beta_1 - 3\beta_3\rho_0^2)R - 3\beta_3\rho_0\left(R^2 - \frac{1}{2}(R^2)\right) - \beta_3 R^3$$

$$= \frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\varkappa_1\cos(2f - f_1) + \frac{3}{4}\beta_3\varkappa\varkappa_1^2\cos(f - 2f_1)$$

$$+ \frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\varkappa_1\cos(2f + f_1) + \frac{3}{4}\beta_3\varkappa\varkappa_1^2\cos(f + 2f_1)$$

$$+ \frac{1}{4}\beta_3\varkappa^3\cos 3f + \frac{1}{4}\beta_3\varkappa_1^3\cos 3f_1.$$

Avant d'aller plus loin, arrêtons-nous un instant à considérer les conséquences des équations (4). En y introduisant les notations

$$3\varepsilon_2 = \frac{4}{3\beta_3}\left[(1-\sigma)^2 - (1-\beta_1) + \frac{3}{2}\beta_3\left(\chi^2 + \frac{1}{2}(R^2)\right)\right],$$

$$2\varepsilon_1 = \frac{4\gamma}{3\beta_3},$$

la deuxième d'elles s'écrit ainsi:

$$(6) \qquad \chi_1^3 + 3\varepsilon_2\chi_1 = 2\varepsilon_1$$

d'où l'on tire:

$$\chi_1 = \sqrt[3]{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^3}} + \sqrt[3]{\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^3}}.$$

Il s'ensuit de cette formule que la valeur de χ_1 ne surpasse pas la limite

$$\chi_1 = 2\sqrt[3]{\varepsilon_1}$$

pourvu qu'on ait:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^3 \overline{>} 0;$$

dans le cas opposé, il est facile de voir qu'il existe toujours une racine négative de l'équation (6) ne devenant pas plus grande que

$$-\sqrt[3]{\varepsilon_1}.$$

En effet, si nous posons:

$$\varepsilon_2 = \omega\varepsilon_1^{\frac{2}{3}}$$

l'équation dont il s'agit prend la forme

$$\chi_1^3 + 3\omega\varepsilon_1^{\frac{2}{3}}\chi_1 = 2\varepsilon_1,$$

et si nous introduisons, au lieu de χ_1, la nouvelle inconnue z, liée à la première par la relation

$$\chi_1 = \varepsilon_1^{\frac{1}{3}}z,$$

nous aurons:

$$(7) \qquad z^3 + 3\omega z = 2.$$

Supposons qu'on ait:

$$\omega = -1;$$

alors les trois racines de l'équation que nous venons d'établir seraient:

$$z = +2; \qquad z = -1; \qquad z = -1.$$

La première d'elles correspond à la limite positive de $\varkappa_1$, la seconde ou la troisième à la limite négative du même coefficient.

De l'équation (7) on déduit facilement le développement que voici:

$$(8) \qquad z = \frac{2}{3\omega}\left\{1 - \frac{1}{1}\left(\frac{4}{27\omega}\right) + \frac{6}{1.2}\left(\frac{4}{27\omega}\right)^2 - \frac{9.8}{1.2.3}\left(\frac{4}{27\omega}\right)^3 + \dots \right.$$
$$\left. \pm \frac{3n(3n-1)(3n-2)\dots(2n+2)}{1.2.3\dots n}\left(\frac{4}{27\omega}\right)^n \mp \dots\right\}$$

qui reste convergent autant que l'on a:

$$\omega \geqq 1 \quad \text{ou} \quad \omega \leqq -1.$$

Relativement aux valeurs assez grandes de ω, positives ou négatives, on peut se contenter de l'expression

$$z = \frac{2}{3\omega},$$

ou bien de celle-ci:

$$\varkappa_1 = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Cette expression qui, par rapport à l'exactitude, est comparable aux coefficients du développement (2), est entièrement en défaut, toutes les fois que la valeur absolue de ω reste inférieure à l'unité. Par là on est en état de juger jusqu'à quel point le dit développement peut être utilisé.

Concevons particulièrement le cas où

$$\omega > -1,$$

ce qui permet l'emploi de la formule

$$z = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\omega^3 + 1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\omega^3 + 1}},$$

ou bien de celle-ci:

$$z = (\omega^3 + 1)^{\frac{1}{6}}\left\{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{\sqrt{\omega^3 + 1}}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\sqrt{\omega^3 + 1}}}\right\}.$$

Si maintenant ω était positif, la valeur de z s'obtiendrait au moyen du développement

$$(9) \qquad z = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\omega^3 + 1}} + \frac{10}{81} \frac{1}{(\omega^3 + 1)^{\frac{4}{3}}} + \dots$$

qui découle de la formule précédente; mais si, au contraire, ω avait une valeur entre 0 et -1, on exprimerait z au moyen d'un développement suivant les puissances de $\sqrt{\omega^3 + 1}$ ou bien suivant celles de ω^3. Voici le premier de ces développements:

$$(10) \qquad z = 2\left\{1 - \frac{1}{9}(\omega^3 + 1) - \frac{1}{81}\frac{10}{3}(\omega^3 + 1)^2 - \dots\right\};$$

il nous donne la racine réelle correspondant aux valeurs de ω peu différentes de -1.

Nous ajoutons encore quelques mots sur les diverses équations de condition correspondant à certains cas spéciaux.

D'abord, on peut se demander les conditions à remplir pour qu'on ait:

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1^{\frac{2}{3}},$$

ou bien:

$$\omega = -1.$$

Les valeurs des deux coefficients ε_1 et ε_2 que nous avons déjà signalées nous fournissent la relation suivante:

$$(11) \qquad \frac{4}{9\beta_3}\left[(1 - \sigma)^2 - (1 - \beta_1) + \frac{3}{2}\beta_3\left(\varkappa^2 + \frac{1}{2}(R^2)\right)\right] = -\left[\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\beta_3}\right]^{\frac{2}{3}},$$

d'où l'on tire, eu égard à la deuxième des équations (4),

$$\frac{4}{9\beta_3}\left[\frac{\gamma}{\varkappa_1} - \frac{3}{4}\beta_3\varkappa_1^2\right] = -\left[\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\beta_3}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Evidemment, on satisfait à cette équation par deux valeurs de $\varkappa_1$, à savoir:

$$\varkappa_1 = 2\left(\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

et:

$$\varkappa_1 = -\left(\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui convient à l'hypothèse $\omega = -1$.

Nous supposons toujours que $\varkappa$ et $\varkappa_1$ soient, tous les deux, de petites quantités de l'ordre des excentricités. Relativement à $\varkappa$ cette hypothèse est légitime en soi-même, mais la supposition relativement à $\varkappa_1$ repose sur une autre hypothèse, à savoir qu'on ait:

$$\frac{\gamma}{\beta_3} \overline{\underline{\circ}}\, \varepsilon^3,$$

ε étant une quantité de l'ordre des excentricités ou des inclinaisons.

Les suppositions admises entraînent, comme nous le verrons plus tard, de petites valeurs de (R^2), tout au plus de l'ordre de ε^2. On ne saurait donc satisfaire à l'équation (11) à moins qu'on n'ait:

$$(1-\sigma)^2 < 1 - \beta_1$$

et

$$\frac{-(1-\sigma)^2 + (1-\beta_1)}{\beta_3} \overline{\underline{\circ}}\, \varepsilon^2.$$

On tire immédiatement des équations (4):

$$-(1-\varsigma)^2 + (1-\sigma)^2 + \frac{3}{4}\beta_3(\varkappa^2 - \varkappa_1^2) = \frac{\gamma}{\varkappa_1},$$

ou bien, si l'on néglige ς^2 auprès de 2ς et σ^2 auprès de 2σ,

$$2(\varsigma - \sigma) + \frac{3}{4}\beta_3(\varkappa^2 - \varkappa_1^2) = \frac{\gamma}{\varkappa_1}.$$

D'un autre côté, si l'on ajoute successivement les relations:

$$\frac{\gamma}{\varkappa_1} = \frac{3}{16}\beta_3\varkappa_1^2$$

et

$$\frac{\gamma}{\varkappa_1} = -\frac{3}{2}\beta_3\varkappa_1^2$$

à l'équation précédente, il en résultera les deux formules que voici:

$$2(\varsigma - \sigma) = -\frac{3}{4}\beta_3\left(\varkappa^2 - \frac{5}{4}\varkappa_1^2\right),$$

$$2(\varsigma - \sigma) = -\frac{3}{4}\beta_3(\varkappa^2 + \varkappa_1^2).$$

Donc, aux deux solutions relatives au coefficient $\varkappa_1$ correspondent deux valeurs de la différence $\varsigma - \sigma$.

Il serait très facile de montrer, par un exemple, l'existence d'un cas tel que nous avons envisagé dans les lignes précédentes. En effet, si l'on admet

$$\beta_1 = 1 - (1 - \sigma)^2 - \frac{9}{4}\beta_3\left(\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{2}{3}},$$

et qu'on suppose l'arbitraire $\varkappa$ très petite auprès de $\varkappa_1$, de sorte qu'on puisse la négliger, la constante (R^2) serait aussi très petite. Ayant ainsi satisfait à la condition (11), on a trouvé deux solutions distinctes et différentes entre elles.

Voyons maintenant quelles sont les conséquences de la supposition

$$\varepsilon_2 = 0.$$

On trouve tout d'abord, en ayant égard à la valeur de ε_1 donnée plus haut, l'équation de condition que voici:

$$(12) \qquad (1 - \sigma)^2 - (1 - \beta_1) + \frac{3}{2}\beta_3\left(\varkappa^2 + \frac{1}{2}(R^2)\right) = 0,$$

et la valeur correspondante de $\varkappa_1$ s'obtient immédiatement au moyen de la formule

$$\varkappa_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\frac{\gamma}{\beta_3}} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\beta_3}}.$$

Pour comparer les deux cas spéciaux que nous venons d'envisager, désignons par β_1' la valeur de β_1 dans le cas où

$$\omega = -1;$$

alors la différence des équations (11) et (12) nous donne:

$$\beta_1' - \beta_1 \doteq -\frac{9\beta_3}{4}\left[\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\beta_3}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

On voit donc que même un très petit changement dans la valeur de β_1 peut produire de graves altérations dans la nature des intégrales, toutes les fois que la différence $2\sigma - \beta_1$ est très petite par rapport à σ ou à β_1.

Le cas spécial de notre problème caractérisé par la condition

$$\varepsilon_2 = 0$$

— ou plutôt un cas qui en diffère très peu — a déjà été envisagé par LEVERRIER et plus tard par M. TISSERAND. Les résultats auxquels sont parvenus ces deux savants ne sont cependant pas tout-à-fait décisifs, vu qu'ils n'ont pas considéré, dans leurs recherches, le terme dépendant de $\varkappa_1^3$. La supposition

$$\varepsilon_2 = 0,$$

ou bien celle-ci:

$$2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 = 0$$

doit alors introduire, dans le résultat, des termes multipliés par le temps ou par un argument astronomique, d'où l'on pourrait conclure l'instabilité du mouvement. Mais en conservant le terme du troisième degré, on évitera non seulement la sortie de l'argument hors des signes trigonométriques, mais encore les très grandes valeurs du coefficient $\varkappa_1$. Néanmoins le résultat pourrait être tel que l'instabilité fût indiquée.

En effet si, après avoir supposé le coefficient ε_1 tellement petite que la valeur de ω tombe entre -1 et $+1$, on admet pour le rapport $\frac{\gamma}{\beta_3}$ une valeur du premier dégré, on obtiendra relativement au coefficient $\varkappa_1$ un résultat dont la valeur numérique sera du même ordre que la racine cubique de l'excentricité. Mais une telle valeur peut s'approcher si près de l'unité que le développement de la fonction perturbatrice cesse d'être convergent. Dans ce cas, on ne saurait rien juger sur la stabilité du mouvement en employant les méthodes qu'on va trouver dans le présent mémoire.

Mais si, au contraire, le rapport $\frac{\gamma}{\beta_3}$ est du troisième degré, ou d'un degré encore plus élevé, la valeur du coefficient $\varkappa_1$ sera au moins du premier degré, de sorte que la fonction ρ_0 reste toujours une petite quantité de l'ordre des excentricités, l'arbitraire $\varkappa$ étant supposée une quantité du même ordre.

Les conclusions auxquelles nous sommes parvenus ne sont encore, il est vrai, que très incomplètes; cependant, elles nous offrent une idée de la vraie nature des résultats demandés.

3. Les résultats que nous venons de trouver, dans le numéro précédent, peuvent, si deux racines de l'équation (6) sont égales ou presque égales, s'écarter sensiblement de la solution complète de l'équation (3). On a cependant trouvé une solution qui donne une idée de la vraie solution, ce que nous allons conclure du fait que la fonction R reste, même dans les cas exceptionnels, de l'ordre de ρ_0, mais qu'elle devient très petite dans les cas ordinaires, à savoir lorsque la valeur absolue du paramètre ω est sensiblement plus grande que l'unité. Relativement aux cas ordinaires, il n'y a nulle difficulté d'obtenir le développement de l'intégrale cherchée tellement exact qu'on peut le désirer.

On peut cependant faire entrer, dès le début, une simplification considérable dans notre problème, en observant que les termes, dont les arguments ont la forme générale

$$(2s + 1)f \pm m(f - f_1),$$

s et m étant des entiers dont s peut avoir la valeur d'un nombre positif quelconque à l'exception de zéro, restent toujours très petits dans l'intégrale, du moins si m n'est pas tellement grand qu'on puisse le comparer à

$$\frac{2s + 1}{\sigma + \varsigma}.$$

Certainement, les termes dont il s'agit exercent quelque influence sur les termes élémentaires, à savoir sur ceux qui dépendent de l'argument

$$f \pm m(f - f_1),$$

mais cette influence est très petite, et on peut en tenir compte d'une

manière très aisée. Nous pouvons donc nous dispenser de considérer, dans notre étude générale, les dits termes.

En réunissant les termes élémentaires, c'est-à-dire ceux dont les arguments permettent des diviseurs fort petits, et qui en conséquence apparaissent fort agrandis dans l'intégrale, nous en désignerons la somme par (ρ), et il sera évidemment permis de mettre

$$(\rho) = \eta \cos[(1 - \varsigma)v - \pi], \tag{13}$$

η et π étant des fonctions de la différence

$$f - f_1 = w.$$

Maintenant, si nous posons:

$$\begin{cases} g = \eta \cos(\pi - \Gamma), \\ h = \eta \sin(\pi - \Gamma), \end{cases} \tag{14}$$

nous aurons, en admettant toujours la notation

$$f = (1 - \varsigma)v - \Gamma,$$

la formule:

$$(\rho) = g \cos f + h \sin f. \tag{15}$$

Par la définition (13), il est visible qu'on peut mettre:

$$(\rho)^3 = \frac{3}{4}(\rho)\eta^2 + \frac{1}{4}\eta^3 \cos 3[(1 - \varsigma)v - \pi],$$

et si nous posons, dans l'équation (3),

$$\rho = (\rho) + S,$$

nous pouvons décomposer cette équation dans les deux suivantes:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2(\rho)}{dv^2} + \left[1 - \beta_1 - \dfrac{3}{4}\beta_3\eta^2\right](\rho) = -\gamma \cos f_1 + [(\rho), S], \\ \dfrac{d^2S}{dv^2} + \left[1 - \beta_1 - \dfrac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]S = \dfrac{1}{4}\beta_3\eta^3 \cos 3[(1 - \varsigma)v - \pi] \\ \qquad\qquad + \beta_3\{3(\rho)^2 + 3(\rho)S + S^2\}S - [(\rho), S]. \end{cases} \tag{16}$$

Il est facile de saisir pourquoi on a introduit les symboles de la forme

$$[x\,,\,y].$$

On s'en servira pour transférer certains termes d'une équation à une autre, en supposant déterminée la somme seule des deux équations, tandis que chacune d'elles est supposée en quelque sorte arbitraire.

Concevons, en effet, qu'on ait une équation différentielle quelconque, dont l'intégrale soit cherchée au moyen des approximations successives. L'intégrale étant composée de termes de divers genres, on trouvera souvent utile, pour faciliter la marche du calcul, de trancher d'abord l'équation proposée en plusieurs autres, chacune soumise à la condition de ne donner naissance qu'à des termes d'une forme déterminée. Mais comme chaque approximation nouvelle peut produire des termes de plusieurs formes, la décomposition de l'équation proposée ne s'opère que de proche en proche.

Evidemment, les fonctions désignées par les symboles que nous avons introduits dans les diverses équations, peuvent être déterminées de telle manière que les termes d'une certaine forme soient retranchés d'une équation, mais ajoutés à une autre.

Faisons d'abord l'application de cette manière de distribuer les divers termes sur les différentes équations, dont la somme redonne l'équation primitive.

Si, dans la première des équations (16), on néglige le terme $[(\rho)\,,\,S]$ on aura un résultat approché que nous désignerons par

$$(\rho)_1 = \eta_1 \cos[(1 - \varsigma_1)v - \pi_1].$$

Ayant des expressions approchées des fonctions η_1 et π_1, il sera facile d'établir l'expression approchée de S.

En effet, les variations de η et de π étant très petites, on est autorisé à intégrer la seconde des équations en y supposant ces fonctions constantes. En ne considérant, dans la première approximation, que le terme tout connu à droite, on a:

$$S = -\frac{\frac{1}{4}\beta_3\eta_1^3}{9(1 - \varsigma)^2 - (1 - \beta_1)} \cos 3[(1 - \varsigma)v - \pi],$$

formule dans laquelle on peut introduire les expressions approchées de η et de π.

Les termes dont la forme est celle de termes en (ρ), et qui par conséquent doivent être supprimés dans la seconde des équations (16) par le symbole $[(\rho)\,,\, S]$, s'obtiennent tout d'abord. Les voici:

$$[(\rho)\,,\, S] = -\frac{\frac{3}{16}\beta_3^2\eta^4}{9(1-\varsigma)^2-(1-\beta_1)}(\rho) + \frac{\frac{3}{64}\beta_3^3\eta^6}{[9(1-\varsigma)^2-(1-\beta_1)]^2}(\rho),$$

de sorte qu'on aura, au lieu de la première des équations (16), la suivante:

$$\frac{d^2(\rho)}{dv^2} + \left[1-\beta_1-\frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right](\rho) = -\gamma\cos f_1 \tag{17}$$

$$-\left\{\frac{\frac{3}{16}\beta_3^2\eta^4}{9(1-\varsigma)^2-(1-\beta_1)} - \frac{\frac{3}{64}\beta_3^3\eta^6}{[9(1-\varsigma)^2-(1-\beta_1)]^2}\right\}(\rho),$$

où l'on peut considérer tous les termes à droite comme donnés.

Il n'y a pas, évidemment, de difficulté de continuer les approximations entamées.

Cela étant, nous abordons l'intégration de l'équation (17) en n'y considérant que le premier terme à droite.

Admettons les développements

$$\begin{cases} g = \varkappa + \varkappa_1\cos w + \varkappa_2\cos 2w + \ldots \\ h = \lambda_1\sin w + \lambda_2\sin 2w + \ldots \end{cases} \tag{18}$$

ce qui donne:

$$(\rho) = \varkappa\cos f + \frac{1}{2}(\varkappa_1-\lambda_1)\cos(f+w) + \frac{1}{2}(\varkappa_2-\lambda_2)\cos(f+2w) + \ldots \tag{19}$$

$$+ \frac{1}{2}(\varkappa_1+\lambda_1)\cos(f-w) + \frac{1}{2}(\varkappa_2+\lambda_2)\cos(f-2w) + \ldots$$

D'un autre côté, puisqu'on a:

$$g^2 + h^2 = \eta^2$$

il sera évidemment possible d'établir le développement

$$\eta^2 = \eta_0^{(2)} + \eta_1^{(2)} \cos w + \eta_2^{(2)} \cos 2w + \dots \tag{20}$$

où, pour abréger l'écriture, on peut omettre les indices supérieures.

Or, on obtiendra facilement les expressions suivantes:

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_0 &= x^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + \lambda_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + \lambda_2^2) + \dots \\ \eta_1 &= 2xx_1 + [x_1x_2 + \lambda_1\lambda_2] + [x_2x_3 + \lambda_2\lambda_3] + \dots \\ \eta_2 &= \frac{1}{2}(x_1^2 - \lambda_1^2) + 2xx_2 + [x_1x_3 + \lambda_1\lambda_3] + [x_2x_4 + \lambda_2\lambda_4] + \dots \\ \eta_3 &= 2xx_3 + [x_1x_2 - \lambda_1\lambda_2] + [x_1x_4 + \lambda_1\lambda_4] + [x_2x_5 + \lambda_2\lambda_5] + \dots \\ \eta_4 &= \frac{1}{2}(x_2^2 - \lambda_2^2) + [x_1x_3 - \lambda_1\lambda_3] + [x_1x_5 + \lambda_1\lambda_5] + [x_2x_6 + \lambda_2\lambda_6] + \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right.$$

et, en se servant de ces notations, les équations de condition que voici:

$$\left\{ \begin{aligned} &\left[-(1-\varsigma)^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0\right]x - \frac{3}{8}\beta_3\{x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 + \dots\} = 0, \\ &\left[-(1-\sigma)^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0\right](x_1+\lambda_1) - \frac{3}{4}\beta_3\Big\{x\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_1(x_2+\lambda_2) \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}\eta_2[x_1 - \lambda_1 + x_3 + \lambda_3] \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}\eta_3[x_2 - \lambda_2 + x_4 + \lambda_4] \\ &\qquad\qquad + \dots\dots\dots\Big\} = -2\gamma \end{aligned} \right.$$

$$
(\mathrm{II}) \left\{
\begin{aligned}
&\left[-[1-\varsigma+(\sigma-\varsigma)]^2+1-\beta_1-\frac{3}{4}\beta_3\eta_0\right](\varkappa_1-\lambda_1) \\
&\qquad -\frac{3}{4}\beta_3\Big\{\varkappa\eta_1+\frac{1}{2}\eta_1(\varkappa_2-\lambda_2) \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2}\eta_2[\varkappa_1+\lambda_1+\varkappa_3-\lambda_3] \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2}\eta_3[\varkappa_2+\lambda_2+\varkappa_4-\lambda_4] \\
&\qquad\qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}=0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\left[-[1-\varsigma-n(\sigma-\varsigma)]^2+1-\beta_1-\frac{3}{4}\beta_3\eta_0\right](\varkappa_n+\lambda_n) \\
&\qquad -\frac{3}{8}\beta_3\eta_1[\varkappa_{n-1}+\lambda_{n-1}+\varkappa_{n+1}+\lambda_{n+1}] \\
&\qquad -\frac{3}{8}\beta_3\eta_2[\varkappa_{n-2}+\lambda_{n-2}+\varkappa_{n+2}+\lambda_{n+2}] \\
&\qquad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad -\frac{3}{8}\beta_3\eta_{n-1}[\varkappa_1+\lambda_1+\varkappa_{2n-1}+\lambda_{2n-1}] \\
&\qquad -\frac{3}{4}\beta_3\eta_n\left[\varkappa+\frac{1}{2}(\varkappa_{2n}+\lambda_{2n})\right] \\
&\qquad -\frac{3}{8}\beta_3\eta_{n+1}[\varkappa_1-\lambda_1+\varkappa_{2n+1}+\lambda_{2n+1}] \\
&\qquad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[-[1-\varsigma+n(\sigma-\varsigma)]^2+1-\beta_1-\frac{3}{4}\beta_3\eta_0\right](\varkappa_n-\lambda_n) \\
&\qquad -\frac{3}{8}\beta_3\eta_1[\varkappa_{n-1}-\lambda_{n-1}+\varkappa_{n+1}-\lambda_{n+1}] \\
&\qquad -\frac{3}{8}\beta_3\eta_2[\varkappa_{n-2}-\lambda_{n-2}+\varkappa_{n+2}-\lambda_{n+2}] \\
&\qquad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad -\frac{3}{8}\beta_3\eta_{n-1}[\varkappa_1-\lambda_1+\varkappa_{2n-1}-\lambda_{2n-1}] \\
&\qquad -\frac{3}{4}\beta_3\eta_n\left[\varkappa+\frac{1}{2}(\varkappa_{2n}-\lambda_{2n})\right] \\
&\qquad -\frac{3}{8}\beta_3\eta_{n+1}[\varkappa_1+\lambda_1+(\varkappa_{2n+1}-\lambda_{2n+1})] \\
&\qquad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.
\end{aligned}
$$

La solution de ces deux systèmes d'équations est visiblement très pénible: s'il était permis de supposer les coefficients $\eta_0, \eta_1, \ldots$ connus, la détermination des coefficients $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et de ς dépendrait de la solution d'un système infini d'équations linéaires, mais puisque, dans notre problème, les $\eta^{(2)}$ sont des fonctions du deuxième degré par rapport aux coefficients $\varkappa$ et λ, il faut considérer les systèmes (I) et (II) simultanément. On comprend aisément que la solution des équations dont il s'agit ne s'obtient qu'au moyen d'approximations; mais même par cette voie il serait difficile de parvenir à des résultats exacts. Nous nous contenterons d'en indiquer les premières opérations.

Supposons, dans ce but, qu'on puisse négliger les coefficients $\varkappa_2$ et λ_2, ainsi que tous les coefficients suivants; alors nous aurons:

$$
\begin{aligned}
\eta_0 &= \varkappa^2+\frac{1}{2}(\varkappa_1^2+\lambda_1^2), \\
\eta_1 &= 2\varkappa\varkappa_1, \\
\eta_2 &= \frac{1}{2}(\varkappa_1^2-\lambda_1^2),
\end{aligned}
$$

et les trois premières des équations du système (II) deviennent

$$(21)\quad\begin{cases} -(1-\varsigma)^2+1-\beta_1-\frac{3}{4}\beta_3\left[\varkappa^2+\frac{1}{2}(\varkappa_1^2+\lambda_1^2)\right]=\frac{3}{4}\beta_3\varkappa_1^2, \\ \left\{-(1-\sigma)^2+1-\beta_1-\frac{3}{4}\beta_3\left[\varkappa^2+\frac{1}{2}(\varkappa_1^2+\lambda_1^2)\right]\right\}(\varkappa_1+\lambda_1) \\ \qquad -\frac{3}{16}\beta_3(\varkappa_1^2-\lambda_1^2)(\varkappa_1-\lambda_1)-\frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2\varkappa_1=-2\gamma, \\ \left\{-[1-\varsigma+(\sigma-\varsigma)]^2+1-\beta_1-\frac{3}{4}\beta_3\left[\varkappa^2+\frac{1}{2}(\varkappa_1^2+\lambda_1^2)\right]\right\}(\varkappa_1-\lambda_1) \\ \qquad -\frac{3}{16}\beta_3(\varkappa_1^2-\lambda_1^2)(\varkappa_1+\lambda_1)-\frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2\varkappa_1=0. \end{cases}$$

Sans entrer dans les détails quant à la détermination des trois inconnues: ς, $\varkappa_1$ et λ_1, on peut tout de suite, des équations signalées, tirer quelques conséquences importantes.

En formant la différence entre les deux premières de ces équations, après avoir divisé la deuxième par $\varkappa_1+\lambda_1$, nous aurons:

$$2(\sigma-\varsigma)-(\sigma^2-\varsigma^2)=\frac{1}{\varkappa_1+\lambda_1}\left\{\frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2\varkappa_1-2\gamma\right\}+\frac{3}{16}\beta_3(\varkappa_1-\lambda_1)^2-\frac{3}{4}\beta_3\varkappa_1^2.$$

De même, la première et la troisième des dites équations, celle-là étant divisée par $\varkappa_1-\lambda_1$, nous donne:

$$-2(\sigma-\varsigma)(1-\varsigma)-(\sigma-\varsigma)^2=\frac{3}{2}\beta_3\frac{\varkappa^2\varkappa_1}{\varkappa_1-\lambda_1}+\frac{3}{16}\beta_3(\varkappa_1+\lambda_1)^2-\frac{3}{4}\beta_3\varkappa_1^2.$$

Ces deux résultats nous fournit les suivants, en omettant ς auprès de l'unité: d'abord la formule

$$4(\sigma-\varsigma)=\frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2\varkappa_1\left[\frac{1}{\varkappa_1+\lambda_1}-\frac{1}{\varkappa_1-\lambda_1}\right]-\frac{3}{4}\beta_3\varkappa_1\lambda_1-\frac{2\gamma}{\varkappa_1+\lambda_1},$$

et puis, en négligeant le terme $\sigma^2-\varsigma^2$, l'équation

$$0=\frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2\varkappa_1\left[\frac{1}{\varkappa_1+\lambda_1}+\frac{1}{\varkappa_1-\lambda_1}\right]-\frac{2\gamma}{\varkappa_1+\lambda_1}+\frac{3}{8}\beta_3(\varkappa_1^2+\lambda_1^2)-\frac{3}{2}\beta_3\varkappa_1^2.$$

Si dans cette dernière équation ainsi que dans la deuxième des équations (21) on met:

$$\lambda_1 = p\varkappa_1,$$

on aura:

$$o = 3\beta_3\varkappa^2 - \frac{2\gamma}{\varkappa_1}(1 - p) - \frac{3}{2}\beta_3\varkappa_1^2(1 - p^2) + \frac{3}{8}\beta_3\varkappa_1^2(1 - p^4),$$

$$\left[-(1-\sigma)^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\right](1+p)\varkappa_1 - \frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2\varkappa_1 - \frac{3}{16}\beta_3(1-p)(1-p^2)\varkappa_1^3$$
$$- \frac{3}{8}\beta_3(1+p)(1+p^2)\varkappa_1^3 = -2\gamma.$$

On voit facilement que ces deux équations sont satisfaites par une valeur positive de $\varkappa_1$, jointe à une valeur de p entre o et $+1$. Mais cette racine positive pouvant devenir, dans certains cas, trop grande pour être compatible avec la nature de notre problème, il faut qu'on examine le cas d'une racine négative.

Posons:

$$\frac{\gamma}{3\beta_3\varkappa_1^3} = -f,$$

la quantité f est, par l'hypothèse, toujours positive, pourvu que le coefficient γ soit positif. De l'équation du quatrième degré en p on tire maintenant:

$$o = \frac{\varkappa^2}{\varkappa_1^2} + 2f(1 - p) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - p^2 + \frac{1}{4}p^4\right).$$

Il découle de cette équation, ce qu'on voit facilement, qu'une des racines s'approche de l'unité, à mesure que le coefficient f prend des valeurs plus considérables. Mais, dans les cas qui se présentent le plus souvent, le coefficient γ est de l'ordre du produit $\beta_3\varkappa$, d'où l'on conclut une assez grande valeur de f, et, en conséquence, que le facteur p ne diffère que très peu de l'unité.

Si, dans les résultats que nous avons obtenus précédemment, on suppose $p = 1$, on retombera dans les équations (4), en y omettant les termes dépendant de (R). Ces équations peuvent donc servir comme

point de départ des approximations successives toutes les fois qu'on est autorisé à commencer par l'hypothèse

$$p = 1.$$

Mais nous avons appris, dans ce qui précède, que la valeur de p ne diffère ordinairement que très peu de l'unité, on est donc amené à commencer les approximations par admettre cette hypothèse, ou bien par faire application des équations (4).

Si l'on retient $\varkappa_2$ et λ_2 à côté de $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ et λ_1, en supposant les coefficients $\varkappa_3, \lambda_3, \ldots$ négligeables, les règles du calcul deviendront plus compliquées que celles que nous avons communiquées précédemment. Mais comme nous allons connaître, dans les pages suivantes, des méthodes plus expéditives, nous n'insistons plus à poursuivre la voie sterile des déterminations successives des coefficients, bien que la méthode entamée puisse donner, excepté dans les cas trop difficiles, des résultats satisfaisants. Mais sans entrer dans le détail du calcul, on peut tirer des systèmes (I) et (II) une conclusion importante.

Admettons que γ soit une quantité du troisième degré, c'est à dire une quantité du troisième ordre par rapport aux excentricités ou aux inclinaisons, nous aurons, en négligeant $\varkappa_2$ et λ_2 ainsi que les coefficients suivants, un résultat du premier degré quant à $\varkappa_1$ et λ_1, la différence $2\sigma - \beta_1$ étant toujours supposée très petite. Si ensuite nous introduisons ces valeurs dans η_0, η_1 et η_2, ainsi que dans les deux équations du système (II) qui contiennent les produits de η_0 par $(\varkappa_2 + \lambda_2)$ et $(\varkappa_2 - \lambda_2)$, et que nous omettions les termes dépendant de $\varkappa_3$ et de λ_3 ainsi que les coefficients suivants, les valeurs de $\varkappa_2$ et de λ_2 que nous obtenons ainsi seront, ce qui est facile à voir, du même degré que le sont $\varkappa_1$ et λ_1. En continuant les opérations analogues, on aura toujours des résultats du premier degré. Donc, si la suite des coefficients $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ forment une série convergente, cela tient à la convergence des facteurs, contenus dans ces quantités, qui ne dépendent que des indices.

Nous sommes donc arrivés au fait que les expressions représentant les inégalités planétaires peuvent renfermer des développements, ne procédant ni suivant les puissances des forces troublantes, ni suivant celles des excentricités ou des inclinaisons. Nous verrons que ces séries, néanmoins,

sont convergentes, et qu'elles ne nécessitent pas la substitution d'un nouvel argument à l'argument astronomique.

4. Au lieu de chercher immédiatement le développement suivant les multiples de v, on peut se proposer de faire avancer la solution de notre problème en introduisant une nouvelle variable indépendante convenablement choisie. Si en même temps, on remplace la fonction (ρ) par une autre, E, il sera possible de déterminer la relation entre (ρ) et E, et celle qui existe entre v et la nouvelle variable que nous désignerons par u, de manière à nous offrir immédiatement une méthode d'effectuer les approximations successives et de faire voir la convergence du résultat.

En effet, si nous désignons par ψ une fonction encore à notre disposition, et que nous posions:

$$(\rho) = \frac{E}{1 + \psi}; \qquad dv = \frac{du}{(1 + \psi)^2},$$

nous aurons une nouvelle équation différentielle du second ordre en E, qui est linéaire, mais qui contient, au lieu de la troisième puissance de E, une certaine fonction de ses coefficients. La fonction ψ peut être choisie tellement que l'équation en E s'intègre immédiatement lorsque les termes à droite sont connus; mais ces termes n'étant pas tout connus d'abord, il faut les chercher au moyen des approximations.

Des relations écrites ci-dessus on tire facilement:

$$\frac{d^2(\rho)}{dv^2} = \frac{d^2E}{du^2}(1 + \psi)^3 - E\frac{d^2\psi}{du^2}(1 + \psi)^2.$$

En vertu de cette expression et de la relation qui lie (ρ) à E, l'équation (17) se transforme en celle-ci:

$$\frac{d^2E}{du^2} + \left\{\frac{1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2}{(1 + \psi)^4} - \frac{1}{1 + \psi}\frac{d^2\psi}{du^2}\right\} E = \frac{1}{(1 + \psi)^3}\{-\gamma \cos f_1 - \ldots\}.$$

Maintenant, si nous déterminons la fonction ψ de façon à satisfaire à l'équation

$$\frac{1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2}{(1 + \psi)^4} - \frac{d^2\psi}{du^2}\frac{1}{1 + \psi} = 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 H,$$

H étant une constante que nous choisissons de manière que la variable u soit un argument astronomique, c'est à dire qu'elle passe avec v par 0, 2π, 4π, etc., nous aurons:

$$(24)\qquad \frac{d^2E}{du^2}+\left\{1-\beta_1-\frac{3}{4}\beta_3H\right\}E=\frac{1}{(1+\psi)^3}\{-\gamma\cos f_1+\ldots\}$$

et

$$(25)\quad \frac{d^2\psi}{du^2}+\left\{4(1-\beta_1)-\frac{3}{4}\beta_3(3\eta^2+H)\right\}\psi-6\left(1-\beta_1-\frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right)\psi^2+\ldots$$
$$=-\frac{3}{4}\beta_3(\eta^2-H).$$

En désignant la différence $v-u$ par Ψ, et en posant:

$$U=(1-\varsigma)u-\Gamma=f-(1-\varsigma)\Psi,$$
$$U_1=(1-\sigma)u-B=f_1-(1-\sigma)\Psi,$$

la fonction η^2 s'exprimera évidemment au moyen de l'argument

$$U-U_1=\omega$$

et de la fonction Ψ. Si l'on néglige, dans la première approximation, la fonction Ψ, nous aurons en vertu de l'équation (25) la valeur de ψ, après quoi la fonction Ψ s'obtient au moyen d'une quadrature. Cette fonction, ψ, étant en quelque sorte arbitraire, on peut omettre d'y introduire les termes dépendant des constantes d'intégration. On aura en conséquence la fonction dont il s'agit exprimée par la seule variable ω, et en continuant les approximations, les deux quantités, η^2 et ψ, ne dépendront que de la dite variable.

La première approximation relativement à ψ s'obtenant tout de suite, nous aurons:

$$(26)\qquad \psi=-\frac{3}{16}\beta_3(\eta^2-H),$$

et puisqu'on a:

$$dv=(1-2\psi+3\psi^2-\ldots)du,$$

il est aisé de voir que la fonction Ψ s'exprime approximativement par la formule

$$\Psi = \frac{3}{8}\beta_3 \int (\eta^2 - H)\,du. \tag{27}$$

Donc, la constante H doit, dans la première approximation, être égalée au terme constant du développement de la fonction η^2, terme que nous avons désigné par η_0.

Par ces considérations il est facile de comprendre que les termes au membre droit de l'équation (24) peuvent être transformés en termes dépendant des arguments U_1 et ω, et que la série qu'on obtient ainsi sera convergente. En effet, par la relation

$$f_1 = U_1 + (1 - \sigma)\Psi$$

on aura

$$\cos f_1 = P \cos U_1 - Q \sin U_1,$$

P et Q étant des fonctions de ω, à savoir:

$$P = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2}(1 - \sigma)^2 \Psi^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(1 - \sigma)^4 \Psi^4 - \ldots,$$

$$Q = (1 - \sigma)\Psi - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(1 - \sigma)^3 \Psi^3 + \ldots$$

Mais en considérant d'abord Ψ comme une série trigonométrique dont l'argument est ω, on aura les fonctions P et Q exprimées au moyen de développements analogues, qui seront nécessairement convergentes.

Il s'ensuit des résultats que nous venons d'établir que la fonction E s'exprime par les arguments U et ω, de sorte que, si l'on pose:

$$E = X \cos U + Y \sin U, \tag{28}$$

les fonctions X et Y seront données au moyen des développements:

$$X = k + k_1 \cos \omega + k_2 \cos 2\omega + \ldots,$$

$$Y = l_1 \sin \omega + l_2 \sin 2\omega + \ldots,$$

les k et les l étant des coefficients constants.

Les fonctions g et h que nous avons introduites par les équations (14) s'expriment aisément au moyen de X et de Y. Pour établir ces relations, nous remplaçons, dans l'équation (28), l'argument U par $f - (1 - \varsigma)\Psi$. Nous aurons ainsi:

$$E = \{X \cos[(1 - \varsigma)\Psi] - Y \sin[(1 - \varsigma)\Psi]\} \cos f$$
$$+ \{X \sin[(1 - \varsigma)\Psi] + Y \cos[(1 - \varsigma)\Psi]\} \sin f;$$

et puisqu'on a

$$E = (1 + \psi)(\rho),$$

on en tire:

$$(29) \qquad \begin{cases} g = \dfrac{X \cos[(1 - \varsigma)\Psi] - Y \sin[(1 - \varsigma)\Psi]}{1 + \psi}, \\[2ex] h = \dfrac{X \sin[(1 - \varsigma)\Psi] + Y \cos[(1 - \varsigma)\Psi]}{1 + \psi}. \end{cases}$$

En formant l'expression

$$(H)^2 = X^2 + Y^2,$$

on reconnaîtra au premier coup d'oeil la relation entre η^2 et $(H)^2$; elle est la suivante:

$$(30) \qquad \eta^2 = \frac{(H)^2}{(1 + \psi)^2},$$

qui entraîne celle-ci:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\eta^2}{(H)^2}.$$

On obtient donc facilement les g, h, η^2, les X, Y, $(H)^2$ étant connus.

Si l'on établit les expressions

$$P = \mu_0 + \mu_1 \cos\omega + \mu_2 \cos 2\omega + \ldots,$$
$$Q = \nu_1 \sin\omega + \nu_2 \sin 2\omega + \ldots,$$

on aura, vu que les fonctions P et Q sont soumises à la condition

$$P^2 + Q^2 = 1,$$

les relations suivantes:

$$\begin{aligned} 1 &= \mu_0^2 + \frac{1}{2}\mu_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}\nu_1^2 + \frac{1}{2}\nu_2^2 + \cdots \\ 0 &= 2\mu_0\mu_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \cdots \\ &\quad + \nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \cdots \end{aligned}$$

etc.

Il s'ensuit de là que parmi les coefficients μ et ν il n'y a aucun qui surpasse la limite $\sqrt{2}$, et que, si plusieurs de ces coefficients ne sont pas très petits, chacun d'eux est sensiblement inférieur à l'unité. On peut fixer, par cette circonstance, le point de départ des approximations successives.

Ayant ainsi indiqué les résultats qu'on peut, sans trop de peine, obtenir en utilisant les méthodes indirectes, nous allons, pour intégrer l'équation proposée, aborder l'application des fonctions elliptiques, ce qui nous fournira des méthodes plus directes.

§ 2. *Solution au moyen des fonctions elliptiques. Première méthode.*

1. Reprenons l'équation (17) du paragraphe précédent, laquelle nous écrivons maintenant de la manière suivante:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \left(1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right)\rho = -\gamma\cos f_1. \tag{1}$$

Evidemment, on y a négligé les termes contenus dans le symbole [ ]; puis, on a omis, pour abréger l'écriture, les crochets autour de ρ.

Après avoir, dans l'équation ainsi établie, introduit:

$$\rho = G\cos f_1 + H\sin f_1, \tag{2}$$

on peut déterminer les fonctions G et H, qui restent encore à notre disposition, mais qui sont toutefois soumises à la condition

$$G^2 + H^2 = \eta^2,$$

de façon qu'elles deviennent indépendantes des arguments f et f_1 isolés; la seule variable dont dépendent maintenant ces fonctions, est donc la différence

$$f - f_1 = w.$$

Si l'on introduit l'expression (2) dans l'équation (1), et qu'on fasse disparaître les coefficients de $\cos f_1$ et de $\sin f_1$, on aura les équations suivantes:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2G}{dv^2} + 2(1-\sigma)\dfrac{dH}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \dfrac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]G = -\gamma, \\ \dfrac{d^2H}{dv^2} - 2(1-\sigma)\dfrac{dG}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \dfrac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]H = 0. \end{cases}$$

Les fonctions G et H ne dépendant que de l'argument w, il est visible que leurs secondes dérivées sont très petites par rapport aux premières; il y a donc lieu à établir une première approximation en intégrant le système

$$(4)\quad \begin{cases} 2(1-\sigma)\dfrac{dH}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \dfrac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]G = -\gamma, \\ -2(1-\sigma)\dfrac{dG}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \dfrac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]H = 0. \end{cases}$$

Après avoir formé les expressions approchées de G et de H, on développera très facilement celles des fonctions

$$M = -\frac{d^2G}{dv^2}; \qquad N = -\frac{d^2H}{dv^2};$$

et les expressions de G et de H s'obtiennent maintenant avec une exactitude plus grande que n'offrent les résultats à tirer des équations (4), en intégrant le système que voici:

$$(5)\quad \begin{cases} 2(1-\sigma)\dfrac{dH}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \dfrac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]G = -\gamma + M, \\ -2(1-\sigma)\dfrac{dG}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \dfrac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]H = N. \end{cases}$$

Maintenant, si l'on fait:

$$\eta^2 = \frac{4}{3}\frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1}{\beta_3} + \frac{y}{1-\sigma}, \tag{6}$$

et qu'on observe la relation

$$2\left(G\frac{dG}{dv} + H\frac{dH}{dv}\right) = 2\eta\frac{d\eta}{dv} = \frac{1}{1-\sigma}\frac{dy}{dv},$$

on deduit des équations précédentes:

$$\left|\begin{aligned} \frac{dy}{dv} &= -\gamma H + MH - NG, \\ -\frac{3}{8}\beta y\frac{dy}{dv} &= -\gamma\frac{dG}{dv} + M\frac{dG}{dv} + N\frac{dH}{dv}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

équations dans lesquelles on a admis, pour abréger, la notation

$$\frac{\beta_3}{(1-\sigma)^2} = \beta.$$

L'intégrale de la seconde des équations (7) s'obtient immédiatement. En désignant la constante d'intégration par:

$$-\gamma e_0 + \frac{3}{16}\beta_3\left[e_0^2 - \frac{4}{3}\frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1}{\beta_3}\right]^2,$$

e_0 étant une arbitraire, ou bien par:

$$-\gamma e_0 + \frac{3}{16}\beta\delta^2,$$

où l'on a employé la notation

$$\frac{4}{3}\frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1}{\beta_3} - e_0^2 = \frac{\delta}{1-\sigma}, \tag{8}$$

on aura:

$$\frac{3}{16}\beta(\delta^2 - y^2) - \gamma e_0 = -\gamma G + \int\left[M\frac{dG}{dv} + N\frac{dH}{dv}\right]dv. \tag{9}$$

Je préfère de garder l'équation (9) sous la forme précédente, bien qu'on puisse l'écrire ainsi:

$$\frac{3}{16}\beta(\delta^2 - y^2) - \gamma e_0 = -\gamma G - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dG}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dv}\right)^2\right\}.$$

En vertu des notations que je viens d'employer, la relation entre η^2 et y s'exprime au moyen de la formule suivante:

$$\eta^2 - e_0^2 = \frac{1}{1-\sigma}(y + \delta);$$

et si l'on pose:

$$y + \delta = z$$

on aura:

$$\eta^2 = e_0^2 + \frac{z}{1-\sigma}. \tag{10}$$

Cela étant, supposons:

$$M = N = 0$$

et formons la somme des carrés de la première des équations (7) et de l'équation (9); dans l'équation résultante, remplaçons y par $z - \delta$, et éliminons η^2 à l'aide de l'équation (10). Nous aurons:

$$\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = z\left\{\frac{\gamma^2}{1-\sigma} + \frac{3}{4}\gamma\beta e_0\delta - \left[\frac{3}{8}\gamma\beta e_0 + \frac{9}{64}\beta^2\delta^2\right]z + \frac{9}{64}\beta^2\delta z^2 - \frac{9}{256}\beta^2 z^3\right\}. \tag{11}$$

Le résultat que nous venons de trouver s'obtient aussi de la manière suivante:

En différentiant la première des équations (7), après y avoir introduit z au lieu de y, nous aurons:

$$\frac{d^2z}{dv^2} = -\gamma\frac{dH}{dv} + \frac{d(MH - NG)}{dv};$$

mais la première des équations (5) nous donne:

$$2(1-\sigma)\frac{dH}{dv} - \frac{3}{4}\beta_3\frac{y}{1-\sigma}G = -\gamma + M,$$

ou bien:

$$\gamma\frac{dH}{dv} = \frac{3}{8}\gamma\beta(z-\delta)G = -\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{1-\sigma} + \frac{1}{2}\frac{M}{1-\sigma}.$$

En y introduisant la valeur de γG tirée de l'équation (9), l'expression de $\frac{dH}{dv}$ devient

$$\gamma\frac{dH}{dv} = \frac{3}{8}\beta(z-\delta)\left|\gamma e_0 + \frac{3}{16}\beta z(z-\delta) + \int\left[M\frac{dG}{dv} + N\frac{dH}{dv}\right]dv\right|$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{1-\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{1-\sigma}M.$$

Maintenant, si nous adoptons la notation

$$W = -\frac{3}{8}\beta(z-\delta)\int\left[M\frac{dG}{dv} + N\frac{dH}{dv}\right]dv - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{1-\sigma}M + \frac{d(MH-NG)}{dv}, \tag{12}$$

l'équation du second ordre devient:

$$\frac{d^2z}{dv^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma^2}{1-\sigma} + \frac{3}{4}\gamma\beta e_0\delta\right] - \left[\frac{3}{8}\gamma\beta e_0 + \frac{9}{64}\beta^2\delta^2\right]z$$
$$+\frac{3}{2}\frac{9}{64}\beta^2\delta z^2 - \frac{9}{128}\beta^2 z^3 + W. \tag{13}$$

Si, dans cette équation, nous faisons $W=0$, nous retrouverons, en l'intégrant, l'équation (11), pourvu que l'arbitraire introduite par l'intégration ait la valeur zéro. Mais nous pouvons nous servir de l'équation (13) afin d'avoir l'expression complète de z au moyen des approximations successives, en supposant dans la première approximation $W=0$. A l'aide de la valeur approchée de z que nous désignerons par z_0, on formera l'expression de la fonction W_0 qui servira comme valeur approchée de W.

En désignant par Δz la correction à ajouter à z_0 pour avoir l'expression complète de z, on aura une valeur approchée de Δz en intégrant l'équation

$$\frac{d^2\Delta z}{dv^2} + \left[\frac{3}{8}\gamma\beta e_0 + \frac{9}{64}\beta^2\delta^2 - \frac{27}{64}\beta^2\delta z_0 + \frac{27}{128}\beta^2 z_0^2\right]\Delta z$$
$$-\frac{27}{128}\beta^2[-\delta + z_0]\Delta z^2 - \frac{9}{128}\beta^2\Delta z^3 + W, \tag{14}$$

après y avoir remplacé la fonction W par W_0 et supprimé les termes dépendant de Δz^2 et Δz^3.

Ayant obtenu, de la manière indiquée, une valeur préliminaire de Δz, on cherchera de nouveau la fonction W, et on aura, en utilisant toujours l'équation (14), un résultat plus approché que le précédent. En continuant ces procédés, on parvient à une expression de Δz dont l'exactitude sera très grande.

Il s'agit maintenant de trouver l'intégrale de l'équation (14), la partie à droite étant supposée tout connue. Nous allons montrer, dans le numéro suivant, qu'une équation linéaire de la forme dont il s'agit s'intègre rigoureusement au moyen des fonctions connues.

2. Supposons qu'on connaisse l'intégrale de l'équation

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_n y^n.$$

En désignant cette intégrale par

$$Y = f(x, a, b),$$

a et b étant les arbitraires d'intégration, nous admettons que ses dérivées partielles par rapport à a et à b restent holomorphes, les valeurs de a et de b étant comprises entre des limites déterminées.

Maintenant, si l'on pose:

$$a = a_0 + \alpha, \qquad b = b_0 + \beta,$$

et qu'on désigne par

$$Y_0 = f(x, a_0, b_0)$$

la valeur de Y correspondant aux valeurs spéciales a_0 et b_0, la fonction Y s'exprimera au moyen de la série infinie dont les premiers termes sont ceux-ci:

$$Y = Y_0 + \frac{\partial Y_0}{\partial a_0}\alpha + \frac{\partial Y_0}{\partial b_0}\beta + \ldots$$

En portant ce développement dans l'équation proposée, nous aurons, en égalant à zéro les coefficients de α et de β,

$$\frac{d^2 \frac{\partial Y_0}{\partial a_0}}{dx^2} = [A_1 + 2A_2 Y_0 + 3A_3 Y_0^2 + \ldots + nA_n Y_0^{n-1}] \frac{\partial Y_0}{\partial a_0},$$

et une autre équation en $\frac{\partial Y_0}{\partial b_0}$ tout à fait semblable. Donc, la fonction Y étant l'intégrale de l'équation (α), l'intégrale de l'équation

$$(\beta) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = [A_1 + 2A_2 Y + 3A_3 Y^2 + \ldots + nA_n Y^{n-1}] y$$

s'exprime au moyen de la formule

$$(\gamma) \qquad y = C_1 \frac{\partial Y}{\partial a} + C_2 \frac{\partial Y}{\partial b}.$$

C_1 et C_2 étant les deux arbitraires.

Voici quelques applications du théorème que nous venons d'établir; nous y admettons d'abord $n = 3$ et

$$A_0 = A_2 = 0.$$

Soient, en faisant dans notre premier exemple la distinction entre trois cas différents,

$$\begin{array}{lll} 1) & A_1 = -(1 + k^2); & A_3 = 2k^2, \\ 2) & A_1 = 2k^2 - 1; & A_3 = -2k^2, \\ 3) & A_1 = 2 - k^2; & A_3 = -2, \end{array}$$

où l'on a désigné par k^2 une constante prise à volonté. Une première intégrale de l'équation (α) s'obtenant immédiatement, les résultats s'écrivent, si l'on choisit les arbitraires convenablement, ainsi:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - (1 + k^2) y^2 + k^2 y^4,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - k^2 + (2k^2 - 1) y^2 - k^2 y^4,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + (2 - k^2) y^2 - y^4.$$

La seconde intégration nous donne, en désignant par x_0 l'arbitraire, qui reste la même dans tous les trois cas,

$$Y = \operatorname{sn}(x + x_0),$$

$$Y = \operatorname{cn}(x + x_0),$$

$$Y = \operatorname{dn}(x + x_0).$$

Maintenant, si l'on porte ces valeurs dans l'équation (β), il en résulte les trois équations suivantes, dans lesquelles on a mis x au lieu de $x + x_0$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} x^2 - (1 + k^2)]y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 - 4k^2]y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} x^2 - 4 - k^2]y;$$

et, en vertu de la formule (γ), on en trouve les intégrales particulières:

$$y = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

$$y = - \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x,$$

$$y = - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x.$$

Il serait facile d'obtenir, en différentiant par rapport à l'autre arbitraire, ou bien par rapport au module, les autres intégrales particulières; cependant, le calcul qui s'y rapporte, et qui s'appuyerait sur les formules connues de M. Hermite, n'étant pas d'intérêt direct pour nos recherches, nous nous dispensons de le donner.

On a donc retrouvé les intégrales connues de l'équation de Lamé, pour des valeurs particulières des arbitraires qu'elle contient.

Examinons maintenant le cas où l'on a:

$$Y = \frac{\nu(1 - \operatorname{sn} x)}{1 - p \operatorname{sn} x},$$

ν et p étant des coefficients constants dont les valeurs absolues sont plus petites que l'unité.

En supposant l'une des arbitraires d'intégration comprise dans la variable x on aurait:

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -\frac{\nu(1-p)\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{(1-p\operatorname{sn} x)^2}.$$

Donc, cette expression est aussi une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[A_1 + 2A_2\frac{\nu(1-\operatorname{sn} x)}{1-p\operatorname{sn} x} + 3A_3\left(\frac{\nu(1-\operatorname{sn} x)}{1-p\operatorname{sn} x}\right)^2\right]y,$$

les coefficients A_0, A_1, A_2, A_3 de même que l'arbitraire $\overline{A}$ introduite par l'intégration de l'équation (α) ayant des valeurs telles que l'expression hypothétique que nous avons donnée à Y soit une intégrale de l'équation

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \overline{A} + A_0 y + \frac{1}{2}A_1 y^2 + \frac{1}{3}A_2 y^3 + \frac{1}{4}A_3 y^4.$$

Cela étant, au lieu de chercher l'autre intégrale particulière au moyen d'une différentiation partielle il vaut mieux la déduire moyennant la formule bien connue:

$$y_2 = y_1\int\frac{dx}{y_1^2},$$

dans laquelle on doit maintenant porter la valeur

$$y_1 = -\frac{\nu(1-p)\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{(1-p\operatorname{sn} x)^2}.$$

Il résulte de là:

$$y_2 = -\frac{\nu(1-p)\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{(1-p\operatorname{sn} x)^2}\int\frac{(1-p\operatorname{sn} x)^4 dx}{\nu^2(1-p)^2\operatorname{cn} x^2\operatorname{dn} x^2}.$$

Cette formule n'étant pas encore mise sous une forme propre à l'usage, il faut la transformer d'une manière convenable. Dans ce but nous nous rappelons les relations

$$\frac{1}{\operatorname{cn} x^2 \operatorname{dn} x^2} = \frac{1}{k'^2 \operatorname{cn} x^2} - \frac{k^2}{k'^2} \frac{1}{\operatorname{dn} x^2},$$

$$\frac{k'^2}{\operatorname{cn} x^2} = \frac{K - E - k^2 K}{K} - \frac{d \dfrac{H_1'(x)}{H_1(x)}}{dx},$$

$$-\frac{k'^2}{\operatorname{dn} x^2} = -\frac{E}{K} - \frac{d \dfrac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}}{dx}$$

d'où l'on tire:

$$\frac{1}{\operatorname{cn} x^2 \operatorname{dn} x^2} = \frac{1}{k'^4} \left\{ \frac{K - E - k^2 K}{K} - \frac{d \dfrac{H_1'(x)}{H_1(x)}}{dx} - k^2 \frac{E}{K} - k^2 \frac{d \dfrac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}}{dx} \right\}.$$

Mais, puisqu'on a:

$$\frac{H_1'(x)}{H_1(x)} = \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} - \frac{k'^2 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x},$$

la formule précédente s'écrit ainsi:

$$\frac{1}{\operatorname{cn} x^2 \operatorname{dn} x^2} = \frac{1}{k'^4} \left\{ l + \frac{d \dfrac{k' \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}}{dx} - (1 + k^2) \frac{d \dfrac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}}{dx} \right\},$$

où l'on a désigné par l la constante

$$\frac{(1 - k^2) K - (1 + k^2) E}{K} = \frac{3}{2} \frac{\pi}{2K} k^2 \left\{ 1 - \frac{1}{8} k^2 - \frac{1}{64} k^4 - \ldots \right\}.$$

En vertu de ces formules on trouverait facilement l'expression de y_2 sous la forme d'une série trigonométrique convergente pour toutes les valeurs réelles de x, à laquelle se trouve ajouté un terme de la forme

$$\frac{hx \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{(1 - p \operatorname{sn} x)^2},$$

h étant une constante.

Le calcul serait presque tout à fait identique avec celui dont nous avons fait l'exposé dans les lignes précédentes, si nous avions supposé:

$$Y = \frac{\nu(1 - \operatorname{cn} x)}{1 - p \operatorname{cn} x}.$$

Les formules y relatives s'obtiennent aussi des précédentes au moyen d'une transformation des fonctions elliptiques qui y entrent; mais puisque les nouvelles expressions nous seront utiles dans ce qui suit, je vais les déduire directement avec quelques détails.

Il s'agit d'abord de donner à la fonction

$$y_2 = \frac{\nu(1 - p)\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{(1 - p \operatorname{cn} x)^2} \int \frac{(1 - p \operatorname{cn} x)^4 \, dx}{\nu^2 (1 - p)^2 \operatorname{sn} x^2 \operatorname{dn} x^2}$$

une forme convenable.

En vertu des relations

$$\frac{1}{\operatorname{sn} x^2 \operatorname{dn} x^2} = \frac{1}{\operatorname{sn} x^2} + \frac{k^2}{\operatorname{dn} x^2},$$

$$\frac{k^2}{\operatorname{dn} x^2} = \frac{k^2}{k'^2}\frac{E}{K} + \frac{k^2}{k'^2}\frac{d\dfrac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}}{dx},$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn} x^2} = \frac{K - E}{K} - \frac{d\dfrac{H_1'(x)}{H_1(x)}}{dx},$$

ou bien:

$$\frac{1}{\operatorname{sn} x^2} = \frac{K - E}{K} - \frac{d\dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}}{dx} - \frac{d\dfrac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}}{dx},$$

on aura:

$$\frac{1}{\operatorname{sn} x^2 \operatorname{dn} x^2} = \frac{k_1'^2 K + (k^2 - k'^2)E}{k'^2 K} - \frac{d\dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}}{dx} + \frac{k^2 - k'^2}{k'^2}\frac{d\dfrac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}}{dx}.$$

En portant cette valeur dans l'expression précédente de y_2, il faut avoir égard aux relations

$$\int (1 - p \operatorname{cn} x)^4 \frac{d\dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}}{dx} dx = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}(1 - p \operatorname{cn} x)^4 - 4p \int \operatorname{cn} x (1 - p \operatorname{cn} x)^3 dx,$$

$$\int (1 - p \operatorname{cn} x)^4 \frac{d\dfrac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}}{dx} dx = (1 - p \operatorname{cn} x)^4 \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}$$
$$- 4p \int \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x (1 - p \operatorname{cn} x)^3 \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} dx,$$

et il est maintenant facile de voir que la fonction y_2 s'exprime au moyen de la formule

$$y_2 = hy_1x + f_2(x),$$

h étant une constante et f_2 une série de la forme

$$f_2(x) = h_0 + h_1 \cos\frac{\pi}{2K}x + h_2 \cos 2\frac{\pi}{2K}x + \ldots,$$

tandis que l'expression

$$y_1 = f_1(x) = \frac{\nu(1-p)\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{(1-p\operatorname{cn} x)^2}$$

donne le développement que voici:

$$f_1(x) = l_1 \sin\frac{\pi}{2K}x + l_2 \sin 2\frac{\pi}{2K}x + \ldots.$$

Cela étant, nous allons considérer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{A_1 + 2A_2\frac{\varkappa(1-\operatorname{cn} x)}{1-p\operatorname{cn} x} + 3A_3\left(\frac{\varkappa(1-\operatorname{cn} x)}{1-p\operatorname{cn} x}\right)^2\right\}y + W. \tag{15}$$

L'intégrale générale s'écrit immédiatement comme suit:

$$\begin{aligned} y = f_1(x)\left\{C_1 - \int[hxf_1(x) + f_2(x)]\,W dx\right\} \\ + [hxf_1(x) + f_2(x)]\left\{C_2 + \int f_1(x)\,W dx\right\}, \end{aligned}$$

mais cette forme n'est pas convenable aux applications, vu qu'elle renferme des termes contenant la variable hors des signes trigonométriques. Or nous ferons voir que ces termes se détruisent.

En effet, si nous ne considérons que les termes dont il s'agit, à savoir:

$$-hf_1(x)\int xf_1(x)Wdx + hxf_1(x)\int f_1(x)Wdx,$$

et que nous remarquions la relation

$$\int xf_1(x)Wdx = x\int f_1(x)Wdx - \int dx\int f_1(x)Wdx,$$

l'expression de y sera donnée au moyen de la formule suivante:

$$
\begin{aligned}
(16) \qquad y = {} & C_1 f_1(x) + C_2[hxf_1(x) + f_2(x)] \\
& - f_1(x)\int f_2(x) W dx + f_2(x)\int f_1(x) W dx \\
& + hf_1(x)\int dx \int f_1(x) W dx.
\end{aligned}
$$

Dans les applications que nous allons faire de la formule (15), les arbitraires C_1 et C_2 sont surabondantes, de sorte qu'on peut les déterminer de manière à rendre le résultat aussi simple que possible. On met donc d'abord

$$C_1 = 0.$$

La fonction W étant donnée par la série

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cos\frac{\pi}{2K}x + \lambda_2 \cos 2\frac{\pi}{2K}x + \ldots,$$

elle entrainera évidemment, dans l'expression de y, un terme de la forme

$$-\lambda x f_1(x);$$

mais l'arbitraire C_2 étant encore à notre disposition, nous la déterminerons de manière à faire disparaître les termes de la forme indiquée, et nous aurons finalement un résultat qui ne contient qu'un terme constant et des termes purement périodiques.

3. Reprenons l'équation (11), après y avoir introduit les notations que voici:

$$\gamma = \beta\varepsilon; \qquad dv = \frac{16}{3}\frac{\mu}{\beta}dx,$$

ε et μ étant deux constantes, la première d'un ordre impair par rapport aux excentricités ou aux inclinaisons, la seconde étant encore à notre disposition.

Nous aurons d'abord:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \mu^2 z\left\{\frac{256}{9}\left[\frac{\varepsilon^2}{1-\sigma} + \frac{3}{4}\varepsilon e_0\delta\right] - \left[4\delta^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0\right]z + 4\delta z^2 - z^3\right\},$$

expression qui se transforme en celle-ci:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \mu^2 z(c - z)(\gamma_0 + \gamma_1 z + z^2), \tag{17}$$

si l'on désigne par c la racine réelle de l'équation

$$z^3 - 4\delta z^2 + \left[4\delta^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0\right]z = \frac{64}{9}\varepsilon\left[\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\delta\right], \tag{18}$$

ou bien, dans le cas de trois racines réelles, celle qui disparait avec ε.

Evidemment, les constantes γ_0 et γ_1 qui entrent dans l'équation (17) doivent satisfaire aux trois conditions suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} c\gamma_0 &= \frac{64\varepsilon}{9}\left[\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\delta\right], \\ -\gamma_0 + c\gamma_1 &= -\left[4\delta^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0\right], \\ -\gamma_1 + c &= 4\delta. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Mais ces conditions ne sont pas, cependant, indépendantes entre elles, vu qu'on peut toujours déduire l'une d'elles des deux autres, en ayant égard à l'équation

$$c^3 - 4\delta c^2 + \left[4\delta^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0\right]c = \frac{64}{9}\varepsilon\left[\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\delta\right]. \tag{18'}$$

En effet, si l'on ajoute, après avoir multiplié la deuxième des équations (19) par c, et la troisième par c^2, la somme de ces produits à la première des dites équations, on retombe dans l'équation (18').

Arrêtons-nous un moment pour examiner la nature numérique de la quantité c. Dans ce but, observons que, dans les cas ordinaires, δ est une quantité positive ou négative de l'ordre zéro par rapport aux masses troublantes et par rapport aux excentricités ou aux inclinaisons, mais qu'elle peut, dans des cas peu fréquents, devenir très petite.

Si δ est une quantité de l'ordre zéro, la valeur de c se développera en une série dont le terme le plus sensible sera:

$$c = \frac{64}{9}\,\frac{\varepsilon\left(\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\delta\right)}{4\delta^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0}.$$

Comme ε, ainsi que e_0, est toujours une constante positive, la valeur de c, tirée de la formule indiquée, est évidemment une quantité de l'ordre de $\varepsilon\varepsilon$ ou de εe_0. Mais cette valeur peut être positive ou négative; elle peut même devenir nulle, ce qui exigerait que la valeur de ∂ satisfasse à la condition

$$\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\partial = 0.$$

Si ∂ était positif, la valeur de c serait toujours positive.

Dans le cas d'une très petite valeur de ∂, posons:

$$3\varepsilon_2 = 4\partial^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0,$$

$$2\varepsilon_1 = \frac{64}{9}\varepsilon\left[\frac{4\varepsilon}{1-\sigma} + 3e_0\partial\right] + 4\partial c^2,$$

ce qui nous donne, au lieu de l'équation (18'):

$$c^3 + 3\varepsilon_2 c = 2\varepsilon_1,$$

dont on obtient la seule racine réelle par la formule

$$c = \sqrt[3]{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^3}} + \sqrt[3]{\varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^3}}.$$

Par ce résultat, on serait porté à croire que deux racines de l'équation (18) fussent toujours imaginaires, mais une telle conclusion serait prématurée. Certes, si la valeur de ∂ était tellement petite qu'on obtînt, en utilisant les formules données ci-dessus, les valeurs de ε_1 et de c au moyen d'approximations successives, l'équation (18) ne permettrait qu'une seule solution réelle. Mais, si au contraire la valeur absolue de ∂ excédait une certaine limite, on pourrait retomber sur le cas irréductible.

Cherchons à limiter, avec un peu de détails, les différents cas qui peuvent se produire dans la nature des racines de l'équation (18).

Dans ce but, posons:

$$z = \zeta + \frac{4}{3}\partial,$$

ce qui nous donne, si nous admettons les notations

$$(20)\qquad \begin{cases} a_2 = \frac{4}{9}\delta^2 - \frac{32}{9}\varepsilon e_0, \\ a_1 = -\frac{8}{27}\delta^3 + \frac{32}{9}\varepsilon e_0\delta + \frac{128}{9}\frac{\varepsilon^2}{1-\sigma}, \end{cases}$$

au lieu de l'équation (18), celle-ci:

$$(21)\qquad \zeta^3 - 3a_2\zeta = 2a_1.$$

L'équation que nous venons de trouver admet trois racines réelles, autant que la condition

$$-a_2^3 + a_1^2 \overline{\overline{<}} 0$$

substiste; dans le cas où vaut le signe supérieur, deux racines sont égales.

En considérant les valeurs de a_1 et de a_2, nous aurons facilement:

$$-a_2^3 + a_1^2 = \frac{8\,.\,128}{9\cdot 9\cdot 9}\left\{-\frac{6\varepsilon^2\delta^3}{1-\sigma} - 3\varepsilon^2 e_0^2\delta^2 + \frac{72\varepsilon^3 e_0\delta}{1-\sigma} + \frac{144\varepsilon^4}{(1-\sigma)^2} + 32\varepsilon^3 e_0^3\right\}.$$

Donc, si nous posons:

$$(22)\qquad F = -\delta^3 - \frac{1}{2}e_0^2(1-\sigma)\delta^2 + 12\varepsilon e_0\delta + 24\frac{\varepsilon^2}{1-\sigma} + \frac{16}{3}(1-\sigma)\varepsilon e_0^3,$$

les conditions sous lesquelles l'équation (18) n'admet qu'une seule racine réelle, qu'elle en admet trois dont deux sont égales, et enfin qu'elle a trois racines réelles et inégales, s'expriment ainsi:

$$F > 0; \qquad F = 0; \qquad F < 0.$$

On voit facilement que le signe de F est le même que celui de $-\delta$, si cette quantité a une valeur numérique suffisamment considérable. Par contre, si δ était très petit, le signe de F ne dépendrait pas uniquement de celui de δ, mais aussi d'autres conditions, que nous allons mettre en lumière.

D'abord, pour rendre nos expressions plus simples, posons:

$$\delta = e_0^2(1-\sigma)\lambda; \qquad \varepsilon = e_0^3(1-\sigma)^2 s,$$

ce qui nous donne:

$$a_2 = \frac{4}{9} e_0^4 (1 - \sigma)^2 (\lambda^2 - 8s),$$

$$a_1 = \frac{8}{27} e_0^6 (1 - \sigma)^3 (-\lambda^3 + 12\lambda s + 48 s^2),$$

$$F = e_0^6 (1 - \sigma)^3 \left(-\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + 12\lambda s + \frac{16}{3} s + 24 s^2\right).$$

Etablissons d'abord les conditions sous lesquelles toutes les trois racines soient égales entre elles. Avant tout, l'équation

$$\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 - 12\lambda s - \frac{16}{3} s - 24 s^4 = 0 \tag{23}$$

doit être satisfaite. Mais, comme il est visible immédiatement de l'équation (21), les trois racines égales satisfaisant à cette équation ne peuvent avoir d'autres valeurs que zéro, ce qui entraîne les conditions

$$a_2 = 0; \qquad a_1 = 0,$$

ou bien

$$\lambda^2 - 8s = 0; \qquad \lambda^3 - 12\lambda s - 48 s^2 = 0.$$

En éliminant s de ces équations, on aura l'équation finale

$$\frac{3}{2}\lambda^4 + \lambda^3 = 0,$$

d'où l'on obtient trois racines égales à zéro, et la quatrième égale à $-\frac{2}{3}$. Trois des valeurs correspondantes de s seront nulles, mais la quatrième devient $\frac{1}{18}$. Or, on se convaincra facilement que l'équation (23) sera satisfaite par les valeurs

$$\lambda = -\frac{2}{3}; \qquad s = \frac{1}{18}.$$

Mais ce qui est le plus essentiel dans la recherche présente, c'est de déterminer les couples de valeurs de λ et de s qui satisfassent à l'équation (23), c'est à dire de fixer les conditions sous lesquelles l'équation (21)

admette deux racines égales. Nous supposons que le paramètre s ait une valeur quelconque positive entre o et S, S étant donné par la comparaison

$$S \overline{\underline{\circ}} \frac{1}{e_0^2}.$$

Supposons d'abord que l'équation (23) n'admette qu'une seule racine réelle, cette racine sera évidemment positive. Désignons-la par λ_0.

Cela étant, les racines de l'équation (21), dont nous supposons deux égales entre elles, s'obtenant au moyen des formules

$$\zeta_0 = \zeta_1 = -\sqrt[3]{a_1}; \qquad \zeta_2 = 2\sqrt[3]{a_1},$$

nous aurons immédiatement celles de l'équation (18). Désignons-les par c, c_1, c_2, et introduisons la valeur du coefficient a_1, après y avoir remplacé λ par λ_0. Cependant, la valeur que nous avons donnée précédemment se remplaçant par la suivante:

$$a_1 = \frac{8}{27} e_0^6 (1-\sigma)^3 \left(\frac{1}{2}\lambda_0^2 - \frac{16}{3}s + 24s^2\right)$$

toutes les fois que l'équation (23) subsiste, nous emploierons cette dernière forme. Enfin, puisque a_1 reste toujours positif, à l'exception des cas d'une valeur très petite de s, nous aurons:

$$c = c_1 = \frac{4}{3} e_0^2 (1-\sigma) \left\{\lambda_0 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\lambda_0^2 - \frac{16}{3}s + 24s^2}\right\},$$

$$c_2 = \frac{4}{3} e_0^2 (1-\sigma) \left\{\lambda_0 + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\lambda_0^2 - \frac{16}{3}s + 24s^2}\right\}.$$

Mais l'équation (23) peut aussi admettre trois racines réelles; déterminons la valeur de s qui rende deux de ces racines égales.

Pour y arriver, posons:

$$\lambda = -\frac{1}{6} + \xi,$$

ce qui conduit à l'équation que voici:

$$(23') \qquad \xi^3 - 3\left[4s + \frac{1}{36}\right]\xi = 2\left[12s^2 + \frac{5}{3}s - \frac{1}{216}\right].$$

Si s disparaît, on tire immédiatement de cette équation les racines:

$$\xi_0 = -\frac{1}{3}; \qquad \xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{6},$$

auxquelles correspondent:

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2}; \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Cherchons maintenant à fixer les conditions auxquelles doit satisfaire le paramètre s pour rendre réelles les trois racines de l'équation (23'). Dans ce but, formons l'expression

$$G = -\left[4s + \frac{1}{36}\right]^3 + \left[12s^2 + \frac{5}{3}s - \frac{1}{216}\right]^2.$$

Effectuant les calculs, il en résultera:

$$G = s\left(144s^3 - 24s^2 + \frac{4}{3}s - \frac{2}{81}\right)$$

$$= 144s\left(s - \frac{1}{18}\right)^3,$$

d'où l'on conclut que les valeurs de s entre 0 et $\frac{1}{18}$ donnent naissance à trois racines réelles de l'équation dont il s'agit. De ces racines, deux sont égales, non seulement si s s'évanouit, mais aussi lorsque s est égal à $\frac{1}{18}$. En adoptant cette valeur de s, nous aurons:

$$\xi^3 - 3\cdot\frac{1}{4}\xi = 2\,\frac{1}{8},$$

d'où l'on tire:

$$\xi_0 = \xi_1 = -\frac{1}{2}; \qquad \xi_2 = 1,$$

ce qui entraîne les valeurs de λ que voici:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = -\frac{2}{3}; \qquad \lambda_2 = \frac{5}{6}.$$

Si l'équation (23) admettait trois racines réelles, nous aurions trois

valeurs différentes de la quantité ∂, deux négatives et une positive, qui rendraient égales deux des racines de l'équation (21). Désignons ces valeurs de ∂ par ∂_0, ∂_1 et ∂_2, de sorte que:

$$\partial_0 < \partial_1 < \partial_2.$$

Si, au contraire, la valeur de ∂ surpassait $\frac{1}{18}$, l'équation (23) n'admettrait qu'une seule racine réelle, laquelle s'exprimerait au moyen de la formule

$$\lambda = -\frac{1}{6} + \sqrt[3]{12s^2 + \frac{5}{3}s - \frac{1}{216} + 12\sqrt{s}\left(s - \frac{1}{18}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \sqrt[3]{12s^2 + \frac{5}{3}s - \frac{1}{216} - 12\sqrt{s}\left(s - \frac{1}{18}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit par là que, dans le cas d'une grande valeur de s, λ est une quantité du même ordre que $s^{\frac{2}{3}}$. Il en résulte, si l'on suppose:

$$s \mathrel{\underline{\circ}} \frac{1}{e_0^2},$$

la comparaison

$$\lambda \mathrel{\underline{\circ}} \frac{1}{e_0^{\frac{4}{3}}},$$

ce qui entraîne:

$$\partial \mathrel{\underline{\circ}} e_0^{\frac{2}{3}}.$$

Si la valeur effective de ∂ était si grande qu'elle ne fût pas compatible avec la comparaison précédente, il n'y aurait pas lieu de craindre que l'équation (18) eût de racines égales, ce qui rendrait moins commode l'application de la méthode dont il s'agit maintenant.

Maintenant, si s est tellement petit que l'équation (23) admet trois racines réelles, le résultat de nos recherches s'exprimera brièvement ainsi:

Si la valeur effective de ∂ est plus grande que ∂_2, ou qu'elle tombe entre ∂_1 et ∂_0, l'équation (18) admet trois racines réelles; mais si:

$$\partial_2 > \partial > \partial_1,$$

ou bien si

$$\delta_0 > \delta,$$

elle n'admet qu'une seule racine réelle.

Dans les cas spéciaux que nous avons envisagés précédemment, les valeurs de δ sont les suivantes:

$$\text{a)} \qquad s = 0,$$

$$\delta_0 = -\frac{1}{2} e_0^2(1-\sigma); \qquad \delta_1 = \delta_2 = 0,$$

$$\text{b)} \qquad s = \frac{1}{18},$$

$$\delta_0 = \delta_1 = -\frac{2}{3} e_0^2(1-\sigma); \qquad \delta_2 = \frac{5}{6} e_0^2(1-\sigma).$$

Les racines de l'équation (18) qui correspondent aux valeurs indiquées de δ, s'obtiennent aisément; on les trouve ci-dessous:

I^ier cas.

$$\delta_0 = -\frac{1}{2} e_0^2(1-\sigma); \qquad \varepsilon = 0; \qquad a_1 = \frac{8}{27}\left(\frac{1}{2} e_0^2(1-\sigma)\right)^3,$$

$$c = 0; \qquad c_1 = c_2 = -e_0^2(1-\sigma).$$

II^ième cas.

$$\delta_1 = \delta_2 = 0; \qquad \varepsilon = 0,$$

$$c = c_1 = c_2 = 0.$$

III^ième cas.

$$\delta_0 = \delta_1 = -\frac{2}{3} e_0^2(1-\sigma); \qquad \varepsilon = \frac{1}{18} e_0^3(1-\sigma)^2; \qquad a_1 = 0,$$

$$c = c_1 = c_2 = -\frac{8}{9} e_0^2(1-\sigma).$$

IV^ième cas.

$$\delta_2 = \frac{5}{6} e_0^2(1-\sigma); \qquad \varepsilon = \frac{1}{18} e_0^3(1-\sigma)^2; \qquad a_1 = \left(\frac{1}{3} e_0^2(1-\sigma)\right)^3,$$

$$c_0 = c_1 = \frac{7}{9} e_0^2(1-\sigma); \qquad c_2 = \frac{16}{9} e_0^2(1-\sigma).$$

Après ces considérations, revenons à l'équation (17).

En posant:

$$\gamma_0 + \gamma_1 z + z^2 = (z - c_1)(z - c_2),$$

nous aurons, en vertu des équations (19), les expressions:

$$c_1 = m + n\sqrt{-1},$$

$$c_2 = m - n\sqrt{-1},$$

où l'on a employé les notations

$$(24) \qquad \begin{cases} m = 2\delta - \frac{1}{2}c, \\ n^2 = -2\delta c + \frac{3}{4}c^2 + \frac{32}{3}\varepsilon e_0, \end{cases}$$

ou bien:

$$(24') \qquad \begin{cases} m = 2e_0^2(1 - \sigma)\lambda - \frac{1}{2}c, \\ n^2 = -2e_0^2(1 - \sigma)\lambda c + \frac{3}{4}c^2 + \frac{32}{3}e_0^4(1 - \sigma)^2 s. \end{cases}$$

Ayant exprimé ainsi les racines de l'équation (18) par m et n, il faut que la quantité n disparaisse dans les quatre cas que nous avons envisagés précédemment. En effectuant le calcul on a évidemment, par les valeurs données plus haut, satisfait à cette condition.

Avant de terminer ces réflexions sur la nature des racines de l'équation (18), faisons la remarque que, dans le cas d'une valeur négative de c, on peut changer les signes de c, c_1, c_2 et de z sans altérer l'équation (17); nous sommes donc autorisés à admettre que, dans la dite équation, la valeur de c soit toujours positive.

4. Si dans l'équation (17), qui s'écrit ainsi:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \mu^2 z(c - z)[(z - m)^2 + n^2],$$

on met:

$$(25) \qquad z = \frac{\nu(1 - \cos\vartheta)}{1 - p\cos\vartheta},$$

ν et p étant deux constantes à notre disposition, et ϑ une fonction de x, on aura d'abord:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\nu(1 - p) \sin \vartheta}{(1 - p \cos \vartheta)^2} \frac{d\vartheta}{dx},$$

$$c - z = \frac{c - \nu + (\nu - pc) \cos \vartheta}{1 - p \cos \vartheta},$$

$$(z - m)^2 + n^2 = \frac{B_0 + B_1 \cos \vartheta + B_2 \cos \vartheta^2}{(1 - p \cos \vartheta)^2},$$

où l'on a employé les notations que voici:

$$(26) \quad \begin{cases} B_0 = \nu^2 - 2\nu m + m^2 + n^2 = (m - \nu)^2 + n^2, \\ B_1 = - 2\nu^2 + 2\nu m(1 + p) - 2m^2 p - 2n^2 p, \\ B_2 = \nu^2 - 2\nu m p + (m^2 + n^2) p^2 = (pm - \nu)^2 + n^2 p^2. \end{cases}$$

Pour arriver immédiatement à la forme canonique des intégrales elliptiques, il faut que nous déterminions les constantes ν et p de manière à satisfaire aux conditions suivantes:

$$(27) \quad \begin{cases} \nu - pc = c - \nu, \\ \nu^2 - \nu m(1 + p) + (m^2 + n^2) p = 0, \end{cases}$$

dont la seconde s'écrit ainsi:

$$(27') \quad (\nu - m)(\nu - mp) = - n^2 p.$$

Il résulte de là:

$$(28) \quad \nu = \frac{c}{2}(1 + p)$$

et:

$$\left(\frac{c}{2} m - \frac{c^2}{4}\right)(1 + p)^2 - (m^2 + n^2) p = 0.$$

En posant encore:

$$(29) \quad r = \frac{2(m^2 + n^2)}{c(c - 2m)},$$

l'équation précédente prend la forme

$$(p + 1)^2 + 2rp = 0,$$

d'où l'on tire:

$$(30) \qquad p = -1 - r \pm \sqrt{(1 + r)^2 - 1}.$$

La constante μ étant encore à notre disposition, nous la déterminerons de manière à rendre les formules résultantes aussi simples que possible, ce qui arrivera, si nous posons:

$$(31) \qquad \mu^2 = \frac{\nu(1 - p)^2}{(c - \nu)(B_0 + B_2)} = \frac{2\nu(1 - p)}{c(B_0 + B_2)} = \frac{1 - p^2}{B_0 + B_2};$$

puis nous admettons la notation

$$(32) \qquad k^2 = \frac{B_2}{B_0 + B_2},$$

et nous aurons, pour déterminer la fonction ϑ, l'équation

$$(33) \qquad \frac{d\vartheta}{dx} = \sqrt{1 - k^2 \sin \vartheta^2},$$

d'où il résulte immédiatement:

$$(33') \qquad \vartheta = \mathrm{am}(x - x_0), \quad \mathrm{mod.}\, k,$$

x_0 étant la constante d'intégration.

Nous sommes ainsi arrivés à la solution de notre problème, du moins quant à la forme. Mais il nous reste d'examiner les propriétés numériques des constantes qui entrent dans nos formules, en premier lieu les limites du paramètre p et celles du module k.

En supposant que la quantité r varie entre $+\infty$ et $-\infty$, il est aisé de voir que le paramètre p acquiert des valeurs imaginaires, toutes les fois que la valeur de r tombe entre 0 et -2. Mais hors de ces limites, chaque valeur de r donne une valeur réelle de p n'excédant pas l'unité. On peut la trouver moyennant le développement que voici:

$$p = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 + r} - \frac{1}{8}\frac{1}{(1 + r)^3} - \ldots.$$

On voit immédiatement que les valeurs de p sont toutes comprises entre -1 et $+1$, mais puisque r ne devient jamais nul, ce que nous allons montrer tout de suite, le paramètre p ne s'approche pas trop de l'unité négative.

On conclut facilement des équations (24) les relations suivantes:

$$(34)\qquad \begin{cases} m^2 + n^2 = (2\delta - c)^2 + \dfrac{32}{3}\varepsilon e_0, \\ c - 2m = -2(2\delta - c), \end{cases}$$

d'où l'on voit que la somme $m^2 + n^2$ ne peut pas disparaître, à moins que le coefficient ε ne soit nul. On aura d'ailleurs, en vertu de l'équation (29), la formule

$$(35)\qquad r = -\frac{2\delta - c}{c} - \frac{32}{3}\frac{\varepsilon e_0}{c(2\delta - c)},$$

d'où il est visible que les deux termes formant r ne se détruisent pas.

En se rappelant que δ est, dans les cas ordinaires, une quantité de l'ordre zéro, et que c est toujours très petit, il est aisé de voir que r sera généralement très grand. On peut donc mettre approximativement:

$$1 + r = -\frac{2\delta}{c},$$

ou bien:

$$p = \frac{1}{4}\frac{c}{\delta}.$$

Le coefficient p étant très petit dans les cas que nous considérons maintenant, nous l'omettons auprès de l'unité, ce qui nous donne, toujours approximativement:

$$\nu = \frac{c}{2},$$

$$m - \nu = 2\delta - c;$$

et ensuite, vu que l'équation (27') nous donne:

$$\nu - mp = \frac{n^2 p}{m - \nu},$$

il résultera:

$$\nu - mp = \frac{n^2 p}{2\delta - c},$$

$$= \frac{1}{4}\frac{c}{\delta}\frac{n^2}{2\delta - c}.$$

Les valeurs des coefficients B_0 et B_2 s'expriment maintenant par les formules suivantes:

$$B_0 = (2\delta - c)^2 + n^2,$$

$$B_2 = \frac{1}{16}\frac{c^2}{\delta^2}\left[1 + \frac{n^2}{(2\delta - c)^2}\right]n^2,$$

lesquelles entraînent la valeur de k que voici:

$$k^2 = \frac{1}{16}\frac{c^2}{\delta^2}\frac{\left(1 + \frac{n^2}{(2\delta - c)^2}\right)n^2}{(2\delta - c)^2 + \left(1 + \frac{1}{16}\frac{c^2}{\delta^2} + \frac{1}{16}\frac{c^2}{\delta^2}\frac{n^2}{(2\delta - c)^2}\right)n^2},$$

expression qui, si on néglige toujours c auprès de δ, prend la forme suivante très simple

$$k^2 = \frac{1}{64}\frac{c^2 n^2}{\delta^4},$$

ou bien, en y introduisant la valeur de n^2,

$$k^2 = \frac{c^2\left(-2\delta c + \frac{32}{3}\varepsilon e_0\right)}{64\delta^4}.$$

Avec le même degré d'approximation que nous avons gardé dans la formule précédente, on aura la valeur de μ en vertu de l'expression:

$$\mu^2 = \frac{1}{4\delta^2};$$

et puisque on a:

$$dv = \frac{16}{3}\frac{\mu}{\beta}dx,$$

la relation entre les variables indépendantes v et x s'écrit ainsi:

$$dx = \frac{3}{8}\beta\delta dv,$$

d'où il est facile de conclure que la différence $\sigma - \varsigma$, que nous désignerons par $\bar{\varsigma}$, s'exprime par la formule:

$$\bar{\varsigma} = \frac{3}{8}\beta\delta \frac{\pi}{2K}. \tag{36}$$

Le module k est évidemment une quantité du troisième ordre par rapport aux excentricités, pourvu que ε soit du premier ordre. Mais il faut toutefois se rappeler que n^2 prend aussi des valeurs négatives, ce qui entraîne des valeurs imaginaires de k. Par une transformation bien connue on obtient dans un tel cas, à savoir si B_2 est négatif,

$$-\frac{k^2}{k'^2} = -\frac{B_2}{B_0},$$

et

$$z = \nu \frac{\operatorname{dn} k'x - \operatorname{cn} k'x}{\operatorname{dn} k'x - p \operatorname{cn} k'x}, \qquad \text{mod.} = i\frac{k}{k'}. \tag{37}$$

On retrouve aisément cette formule d'une manière directe. En effet, si nous mettons:

$$\cos\vartheta = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1 + \frac{B_2}{B_0}\sin\psi^2}},$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{1 + \frac{B_2}{B_0}}}{\sqrt{1 + \frac{B_2}{B_0}\sin\psi^2}}\sin\psi,$$

nous aurons par différentiation:

$$\sin\vartheta d\vartheta = \frac{1 + \frac{B_2}{B_0}}{\left\{1 + \frac{B_2}{B_0}\sin\psi^3\right\}^{\frac{3}{2}}}\sin\psi d\psi,$$

ce qui nous donne:

$$\nu(1-p)^2\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = \mu^2 B_0(c-\nu)\left(1+\frac{B_2}{B_0}\sin\psi^2\right).$$

Donc, en posant:

$$(38)\qquad \frac{B_2}{B_0} = \frac{k^2}{k'^2},$$

et en observant qu'on a:

$$(39)\qquad \frac{\nu(1-p)^2}{(c-\nu)B_0} = \frac{2\nu(1-p)}{cB_0} = \frac{1-p^2}{B_0} = \frac{\nu(1-p)^2}{(c-\nu)(B_0+B_2)}\frac{1}{k'^2} = \frac{\mu^2}{k'^2},$$

il résulte:

$$\psi = \operatorname{am} k'x, \qquad \operatorname{mod} = i\frac{k}{k'},$$

la constante x_0 étant supposée comprise en x.

Ayant ainsi déterminé l'amplitude ψ, on aura immédiatement, en vertu de l'équation (25), le résultat que nous avons déjà exprimé par l'équation (37).

5. Toutes les fois que le coefficient p n'est plus une quantité petite, les considérations sur les valeurs de k et de μ aboutissent à changer notablement le caractère des résultats que nous avons obtenus précédemment.

Déjà dans le numéro précédent nous avons fait ressortir que les valeurs réelles de p tombent toujours entre $+1$ et -1. Puis, nous avons vu que les hypothèses $r=-2$ et $r=0$ entraînent les dites valeurs de p, mais que de chaque valeur de r entre -2 et 0 découle un résultat imaginaire relativement à p. Il nous reste donc à déterminer les limites de la quantité r, considerée comme fonction de δ, c, ε et e_0, ou bien des trois racines c, c_1 et c_2.

Dans ce but reprenons la formule (29). En y introduisant:

$$m^2+n^2 = c_1c_2,$$

et

$$c(c-2m) = c(c-c_1-c_2),$$

nous aurons:

$$(35')\qquad r = \frac{2c_1c_2}{c(c-c_1-c_2)},$$

où il faut observer que le produit $c_1 c_2$ est toujours positif. En posant pour un moment:

$$\frac{c_1}{c} = \alpha; \qquad \frac{c_2}{c} = \beta,$$

l'expression précédente s'écrit ainsi:

$$r = \frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha - \beta},$$

et on en tire:

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{2\beta(1 - \beta)}{(1 - \alpha - \beta)^2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} = \frac{2\alpha(1 - \alpha)}{(1 - \alpha - \beta)^2}.$$

Les valeurs de α et de β qui rendent r minimum s'obtiennent maintenant en résolvant les équations

$$\beta(1 - \beta) = 0,$$

$$\alpha(1 - \alpha) = 0.$$

On les satisfait par:

$$\alpha = 0; \qquad \beta = 0,$$

ou bien par:

$$\alpha = 1; \qquad \beta = 1.$$

La première solution nous donne:

$$r = 0$$

et la seconde:

$$r = -2.$$

On peut d'une autre manière mettre en évidence le résultat que nous venons de signaler. Il est visible, par la symétrie, qu'on a:

$$\alpha = \beta.$$

En portant cette valeur dans l'expression de r, on aura:

$$2\alpha^2 + 2r\alpha = r,$$

d'où il résulte:

$$\alpha = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{2}r}.$$

Si l'on admet:

$$r = 0,$$

la valeur de α sera nulle, et si l'on fait:

$$r = -2,$$

nous aurons:

$$\alpha = 1.$$

Mais encore, chaque valeur de r entre 0 et -2 nous conduit à un résultat imaginaire relativement à α. Donc, les valeurs de r s'étendent de $-\infty$ à -2, et de 0 jusqu'à $+\infty$.

Il est facile de voir qu'on retombe toujours dans le cas: $r = -2$, si les deux racines c et c_1 sont égales

Cela étant, nous allons considérer en particulier le 3ième cas du numéro 3. En se rappelant les valeurs que nous avons données de δ, de c et de ε, ou bien celles des trois racines, on aura en vertu de la formule (35) ou (35'):

$$r = -2,$$

ce qui donne:

$$p = 1.$$

Après avoir trouvé le coefficient p, on obtient immédiatement au moyen de l'équation (27'):

$$(m - \nu)^2 = -n^2,$$

ou bien, vu qu'on a, dans le cas présent,

$$\nu = c,$$

l'équation

$$(m - c)^2 = -n^2.$$

Ensuite, on tire des équations (26) les valeurs

$$B_0 = B_2 = 0,$$

mais on n'obtient celle de k^2 ou de $-\frac{k^2}{k'^2}$ que sous la forme indéterminée: $\frac{0}{0}$. Pour déduire la vraie valeur du module, posons:

$$p = 1 - \Delta p,$$

ce qui nous donne:

$$\begin{aligned}
B_0 &= (m - \nu)^2 + n^2 = [(m - \nu)m + n^2]\,\Delta p, \\
B_2 &= B_0 - 2\,[(m - \nu)m + n^2]\,\Delta p + (m^2 + n^2)\,\Delta p^2, \\
&= -\,[(m - c)m + n^2]\,\Delta p + (m^2 + n^2)\,\Delta p^2 - mc\Delta p^2.
\end{aligned}$$

Avec ces résultats on obtient tout de suite:

$$\begin{aligned}
-\frac{k^2}{k'^2} &= \frac{(m - c)m + n^2 - (m^2 + n^2 - mc)\,\Delta p}{(m - c)m + n^2} \\
&= 1 - \Delta p,
\end{aligned}$$

ce qui montre que le module $-\frac{k^2}{k'^2}$ s'approche avec p de l'unité, tandis que k^2 tend vers $-\infty$. Mais alors la fonction z acquiert brusquement une valeur constante, à savoir c, dont l'expression est

$$c = -\frac{8}{9}\,c_0^2(1 - \sigma).$$

En introduisant, dans l'équation (10), la valeur signalée de z, il résulte:

$$\eta^2 = \frac{1}{9}\,c_0^2.$$

Pour rendre notre exposé plus simple, écrivons l^2 au lieu de $-\frac{k^2}{k'^2}$; puis, désignons par L l'intégrale elliptique complète de la première espèce correspondant au module l. Or, puisque nous avons:

$$\begin{aligned}
k'dx &= \frac{3}{16}\,\beta\,\frac{k'}{\mu}\,dv \\
&= \frac{3}{16}\,\beta\sqrt{\frac{B_0}{1 - p^2}}\,dv \\
&= \frac{3}{16}\,\beta\sqrt{\frac{(m - \nu)m + n^2}{2 - \Delta p}}\,dv,
\end{aligned}$$

le facteur $\bar{\varsigma}$ s'exprimera au moyen de la formule

$$\bar{\varsigma} = \frac{3}{16}\beta\frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{(m-\nu)m+n^2}{2-\Delta p}},$$

d'où l'on conclut que $\bar{\varsigma}$ tend vers zéro, lorsque p s'approche de l'unité.

6. Les substitutions que nous avons employées jusqu'ici pour mettre les différentielles sous la forme canonique des différentielles elliptiques, se remplacent avantageusement, lorsque les trois racines sont réelles et très petites, ou bien si la valeur de p est imaginaire, par d'autres, dont je vais communiquer quelques unes.

En supposant:

$$c < c_1 < c_2,$$

j'écris notre différentielle ainsi:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \mu^2 z(c-z)(c_1-z)(c_2-z).$$

En posant:

$$z = \frac{c(1-\zeta)}{1-\frac{c}{c_1}\zeta}, \tag{40}$$

on trouve:

$$c - z = \frac{c\left(1-\frac{c}{c_1}\right)\zeta}{1-\frac{c}{c_1}\zeta},$$

$$c_1 - z = \frac{c_1\left(1-\frac{c}{c_1}\right)}{1-\frac{c}{c_1}\zeta},$$

$$c_2 - z = \frac{c_2\left(1-\frac{c}{c_2}\right)}{1-\frac{c}{c_1}\zeta}\left\{1-\frac{c}{c_1}\frac{c_2-c_1}{c_2-c}\zeta\right\},$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{c\left(1-\frac{c}{c_1}\right)}{\left(1-\frac{c}{c_1}\zeta\right)^2}\frac{d\zeta}{dx},$$

de sorte que, si l'on choisit le coefficient μ^2 de manière à satisfaire à la condition

$$4 = \mu^2 c_1 c_2 \left(1 - \frac{c}{c_2}\right)$$
$$= \mu^2 c_1 (c_2 - c),$$

et que l'on admette la notation

$$k^2 = \frac{c}{c_1} \frac{c_2 - c_1}{c_2 - c},$$

notre résultat sera:

$$\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = 4\zeta(1 - \zeta)(1 - k^2\zeta).$$

Il s'ensuit de là:

$$\zeta = \operatorname{sn} x^2,$$

la constante d'intégration étant supposée comprise en x.

Dans le cas de deux racines égales, c'est à dire si l'on a:

$$c = c_1,$$

la fonction z se réduit à la valeur constante c, et on trouve:

$$k = 1.$$

Par la valeur de μ^2 que nous avons donnée on déduit:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{3}{32}\beta\sqrt{c_1(c_2 - c)},$$

expression d'où l'on peut rétablir le résultat approché que nous avons signalé par la formule (36).

En effet, si l'on admettait, dans l'équation (18), δ tellement grand qu'on pût négliger le terme $\frac{32}{3}\varepsilon e_0$ par rapport à $4\delta^2$, de sorte que fût:

$$cc_2 + cc_1 + c_1 c_2 = 4\delta^2,$$

on aurait, puisque c est moindre qu'une quantité de l'ordre zéro, la formule approchée

$$\frac{dx}{dv} = \frac{3}{16}\beta\delta.$$

Cette valeur n'étant que la moitié de celle que nous avons trouvée dans le numéro 4, les deux résultats paraissent se contredire l'un l'autre. Cependant, en considérant que la fonction z, telle que l'équation (40) nous l'a donnée, se développe suivant les multiples de $\frac{\pi}{2K}2x$, on trouvera:

$$\bar{\zeta} = \frac{3}{8}\beta\delta\frac{\pi}{2K},$$

ce qui s'accorde avec la formule (36).

Il me faut ajouter que les formules que nous venons de déduire, dans ce numéro, s'appliquent non seulement au cas où les trois racines de l'équation (18) sont très petites, mais aussi toutes les fois que les racines dont nous avons parlé, sont réelles.

7. En supposant toujours les trois racines réelles, on peut opérer la réduction à la forme canonique en utilisant la substitution

$$z = \frac{c_2}{1 + \zeta^2}. \tag{41}$$

Il découle de là:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2c_2\zeta}{(1 + \zeta^2)^2}\frac{d\zeta}{dx},$$

$$c - z = -\frac{c_2 - c(1 + \zeta^2)}{1 + \zeta^2},$$

$$c_1 - z = -\frac{c_2 - c_1(1 + \zeta^2)}{1 + \zeta^2},$$

$$c_2 - z = \frac{c_2\zeta^2}{1 + \zeta^2},$$

de sorte que, si l'on satisfait à la condition

$$4 = \mu^2 c_1(c_2 - c),$$

on aura:

$$\frac{c_1}{c_2 - c_1}\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = \left(1 - \frac{c_1}{c_2 - c_1}\zeta^2\right)\left(1 - \frac{c}{c_2 - c}\zeta^2\right).$$

Maintenant, si nous reprenons la notation

$$k^2 = \frac{c(c_2 - c_1)}{c_1(c_2 - c)},$$

nous aurons immédiatement:

$$\zeta = \sqrt{\frac{c_2 - c_1}{c_1}} \operatorname{sn}(x + x_0),$$

x_0 étant une arbitraire.

En introduisant cette valeur de ζ dans l'expression (41), on tombera dans le résultat

$$z = \frac{c_1 c_2}{c_1 + (c_2 - c_1)\operatorname{sn}(x + x_0)^2}, \tag{41'}$$

que nous allons comparer à l'équation (40), qui peut s'écrire ainsi:

$$z = \frac{cc_1}{c_1 + (c_1 - c)(\operatorname{tang} \operatorname{am} x)^2}.$$

Pour opérer le rapprochement des deux résultats, mettons le premier sous la forme

$$z = \frac{c_1 c_2}{\frac{c_1 c_2}{c} - \frac{c_1}{c}(c_2 - c)[\operatorname{dn}(x + x_0)]^2}.$$

Maintenant, si nous identifions x_0 avec $-K + iK'$, et que nous observions l'expression

$$k'^2 = \frac{c_2(c_1 - c)}{c_1(c_2 - c)},$$

nous aurons immédiatement notre deuxième résultat.

Cependant, x_0 étant une constante arbitraire, elle peut être réelle, ce qui entraînera des valeurs réelles de z entre c_1 et c_2. Evidemment, une telle solution doit être rejetée toutes les fois que c_1 et c_2 acquièrent des valeurs de l'ordre zéro, mais dans le cas où toutes les racines sont de petites quantités du même ordre, il paraît possible de la mettre en usage, pourvu que la constante e_0, qui doit être déterminée au moyen des observations, subisse un changement convenable.

Si l'on admettait la solution donnée par l'équation (41'), on aurait,

les deux racines étant égales, un cas asymptotique, vu que l'expression de z renferme des exponentielles.

Pour en faire ressortir les formules qui donnent la fonction z renfermée entre 0 et c, la variable restant réelle, écrivons l'équation (41') de la manière suivante:

$$z = \frac{c_1}{1 - \frac{c_2 - c_1}{c_2} \operatorname{cn}(x + x_0)^2}.$$

En portant dans cette expression la valeur

$$x_0 = iK',$$

il en résulte:

$$z = \frac{c_1}{1 + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \frac{\operatorname{dn} x^2}{k^2 \operatorname{sn} x^2}}.$$

Maintenant, si nous faisons:

$$c_1 = c; \qquad k = 1,$$

il viendra:

$$z = \frac{c(e^x - e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2 + \frac{4(c_2 - c)}{c_2}}.$$

Telle est l'expression demandée; elle donne pour des valeurs infinies de x, positives ou négatives, $z = c$, mais si x était nul, il en résulterait: $z = 0$.

La formule à laquelle nous sommes parvenus, s'obtient aussi d'une manière directe.

En effet, si nous posons:

$$z = \frac{c}{1 + \zeta^2},$$

il sera facile d'obtenir l'équation que voici:

$$4\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = \mu^2[c_2(1 + \zeta^2) - c][c_1(1 + \zeta^2) - c],$$

d'où il résulte, en supposant

$$c = c_1; \qquad 4 = \mu^2 c(c_2 - c):$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = \zeta\sqrt{1 + \frac{c_2}{c_2 - c}\zeta^2}.$$

On arrive immédiatement à l'intégrale de cette équation en mettant

$$\zeta = \sqrt{\frac{c_2 - c}{c_2}}\operatorname{tang}\varphi.$$

En effet, l'équation précédente se transformant en celle-ci:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sin\varphi,$$

on en conclut:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = e^x,$$

la constante d'intégration étant comprise dans le x.

Maintenant, puisqu'on a:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi^2},$$

on trouvera:

$$\zeta = 2\sqrt{\frac{c_2 - c}{c_2}}\,\frac{e^x}{1 - e^{2x}}$$

$$= -\sqrt{\frac{c_2 - c}{c_2}}\,\frac{2}{e^x - e^{-x}},$$

ce qui entraîne:

$$z = \frac{c}{1 + \frac{c_2 - c}{c_2}\,\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}},$$

c'est à dire la formule que nous avons déduite plus haut.

Nous verrons, dans ce qui suit, que la solution asymptotique n'appartient pas à notre problème; elle est due uniquement à la manière d'aborder les approximations que nous avons adoptée dans le numero 1.

8. Ayant ainsi, par les recherches que nous avons communiquées dans les numéros précédents, trouvé l'expression analytique de la fonction η^2 ou bien, ce qui revient au même, de z, telle qu'on peut l'obtenir en ne considérant que les termes indépendants des fonctions M et N, il nous reste à établir les formules qui expriment les fonctions G et H. Dans ce but, reprenons l'équation (9) qui nous donne la formule suivante:

$$G = e_0 + \frac{3}{16}\frac{z}{\varepsilon}(-2\delta + z). \tag{42}$$

En y portant la valeur de z tirée de la formule (25), nous aurons:

$$G = e_0 + \frac{3}{16}\frac{\nu}{\varepsilon}\frac{1-\operatorname{cn} x}{1-p\operatorname{cn} x}\left\{-2\delta + \frac{\nu(1-\operatorname{cn} x)}{1-p\operatorname{cn} x}\right\}. \tag{43}$$

Nous nous arrêtons un moment à cette formule pour en tirer un résultat approché.

Si δ est une quantité de l'ordre zéro, nous avons approximativement:

$$2\nu\delta = c\delta = \frac{16}{3}e_0\varepsilon + \frac{64}{9}\frac{\varepsilon^2}{\delta};$$

donc, en négligeant le terme dépendant de ν^2, nous aurons la formule approchée

$$G = e_0 - e_0\frac{1-\operatorname{cn} x}{1-p\operatorname{cn} x} - \frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{\delta}\frac{1-\operatorname{cn} x}{1-p\operatorname{cn} x}$$

ou bien:

$$G = e_0\frac{(1-p)\operatorname{cn} x}{1-p\operatorname{cn} x} - \frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{\delta}\frac{1-\operatorname{cn} x}{1-p\operatorname{cn} x}.$$

En y restituant les valeurs de δ et de ε, à savoir:

$$\delta = \frac{4}{3}\frac{2\sigma-\beta_1}{\beta_3},$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\beta_3},$$

et en omettant les termes dépendant de p et du module k, l'expression de G devient:

$$G = e_0\cos w - \frac{\gamma}{2\sigma-\beta_1}(1-\cos w), \tag{A}$$

où l'on a introduit l'argument w au lieu de x.

Si, dans la formule (42), on introduit l'expression de z, donnée par l'équation (40), il en résulte:

$$(44) \qquad G = e_0 + \frac{3}{16}\frac{cc_1}{\varepsilon}\frac{\operatorname{cn} x^2}{c_1 - c \operatorname{sn} x^2}\left\{-2\delta + \frac{cc_1 \operatorname{cn} x^2}{c_1 - c \operatorname{sn} x^2}\right\};$$

et enfin, en substituant l'expression (41'), on aura:

$$(45) \quad G = e_0 + \frac{3}{16}\frac{c_1 c_2}{\varepsilon}\frac{1}{c_1 + (c_2 - c_1)[\operatorname{sn}(x + x_0)]^2}\left\{-2\delta + \frac{c_1 c_2}{c_1 + (c_2 - c_1)[\operatorname{sn}(x + x_0)]^2}\right\}.$$

La fonction H s'obtient moyennant la première des équations (7). En divisant par γ on aura immédiatement:

$$(46) \qquad H = -\frac{1}{\gamma}\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dv} = -\frac{3}{16}\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{dz}{dx},$$

les termes dépendant de M et de N étant négligés.

Il résulte de cette expression, eu égard à la formule (25),

$$(47) \qquad H = -\frac{3}{16}\frac{\nu(1-p)}{\mu\varepsilon}\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{(1 - p \operatorname{cn} x)^2}.$$

Pour avoir une expression approchée de H, de même nature que la formule (A), rappelons-nous que le coefficient μ s'exprime approximativement par $\frac{1}{2\delta}$, la valeur de δ étant assez grande. De là il s'ensuit:

$$\frac{\nu}{\mu\varepsilon} = \frac{c\delta}{\varepsilon} = \frac{16}{3}e_0 + \frac{64}{9}\frac{\varepsilon}{\delta},$$

de sorte que nous aurons:

$$(\mathrm{B}) \qquad H = -\left(e_0 + \frac{\gamma}{2\sigma - \beta_1}\right)\sin w.$$

Ensuite, de la formule (46), en y introduisant l'expression (40), découle la relation:

$$(48) \qquad H = \frac{3}{16}\frac{c}{c_1}\frac{c_1 - c}{\mu\varepsilon}\frac{2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\left(1 - \frac{c}{c_1}\operatorname{sn} x^2\right)^2},$$

et la formule (41′) conduit au résultat suivant:

$$H = \frac{3}{16}\frac{c_2}{c_1}\frac{c_2 - c_1}{\mu\varepsilon}\frac{2\,\mathrm{sn}\,(x + x_0)\,\mathrm{cn}\,(x + x_0)\,\mathrm{dn}\,(x + x_0)}{\left(1 + \frac{c_2 - c_1}{c_1}\,\mathrm{sn}\,(x + x_0)^2\right)^2}. \tag{49}$$

Dans les deux formules (48) et (49), on peut finalement remplacer le facteur $\frac{1}{\mu}$ par:

$$2\sqrt{c_1(c_2 - c)}.$$

La valeur approchée du coefficient $\bar{\varsigma}$ s'obtient aisément au moyen de la formule

$$\bar{\varsigma} = \frac{3}{8}\beta\delta.$$

En y introduisant l'expression de δ, nous obtenons:

$$\bar{\varsigma} = \sigma - \varsigma = \frac{1}{2}\frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1}{1 - \sigma} - \frac{3}{8}\frac{\beta_3 e_0^2}{1 - \sigma}$$

Mais puisque nous avons négligé les fonctions M et N, nous ne sommes pas autorisés à attendre du calcul que nous venons d'achever un résultat tout à fait exact. En effet, il y a, dans l'expression obtenue, des termes dépendant de σ^2 ou de $\beta_3\sigma$ qui ne sont pas encore complets. Négligeons-les, et notre résultat deviendra:

$$\varsigma = \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{3}{8}\beta_3 e_0^2.$$

La fonction ρ s'obtient maintenant immédiatement par la substitution des valeurs (A) et (B) dans l'équation (2). Ainsi, nous obtenons:

$$\rho = \left(e_0 + \frac{\gamma}{2\sigma - \beta_1}\right)\cos f - \frac{\gamma}{2\sigma - \beta_1}\cos f_1,$$

résultat approché, il est vrai, mais qui pourtant nous permet d'identifier, du moins approximativement, le coefficient $e_0 + \frac{\gamma}{2\sigma - \beta_1}$ avec la constante $\varkappa$, introduite dans le paragraphe précédent.

Examinons encore le cas où:

$$\frac{4\varepsilon}{1 - \sigma} + 3e_0\delta = 0,$$

c'est à dire où c devient nul sans que le coefficient ε disparaisse. Les formules (43) et (47) nous donnent immédiatement:

$$G = e_0; \qquad H = 0,$$

d'où il résulte:

$$\rho = e_0 \cos f_1.$$

Mais dans le cas actuel on a aussi, en vertu de la première des équations (4),

$$\left(2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 e_0^2\right)e_0 = -\gamma.$$

On conclut de là que ni le coefficient e_0, ni l'angle B, qui entre dans l'argument f_1, ne sont plus des arbitraires, mais que l'un se trouve par calcul, et que l'autre est une des données du problème.

9. En introduisant dans la formule (40) les valeurs de c, de c_1 et de c_2 que nous venons de signaler au n° 3, cas IV, à savoir:

$$c = \frac{7}{9}e_0^2(1 - \sigma); \qquad c_1 = \frac{7}{9}e_0^2(1 - \sigma); \qquad c_2 = \frac{16}{9}e_0^2(1 - \sigma),$$

nous aurons

$$z = c; \qquad k = 1.$$

Ce résultat aurait changé brusquement si l'on attribuait une valeur infiniment petite, mais différente de zéro, à la différence $c_1 - c$. En effet, dans ce cas les valeurs de z s'étendraient depuis $z = 0$ jusqu'à $z = c$.

Si les racines c, c_1 et c_2 étaient, toutes les trois, du même ordre, le module serait évidemment de l'ordre zéro par rapport aux masses et aux excentricités, mais plus la différence $c_1 - c$ est sensible, plus la valeur du module s'éloigne de l'unité, de sorte que les développements trigonométriques seront, le plus souvent, assez convergents.

Mais on peut très facilement éviter les cas d'un module trop approché de l'unité. Cela s'entend aisément, si l'on écrit les équations (5) de la manière suivante:

$$2(1 - \sigma)\frac{dH}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \Delta\beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]G = -\gamma + M - \Delta\beta_1 G,$$

$$-2(1 - \sigma)\frac{dG}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \Delta\beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]H = N - \Delta\beta_1 H.$$

En effet, en attribuant au coefficient $\Delta\beta_1$ une valeur telle qu'on ait:

$$\Delta\beta_1 \equiv \beta_3 e_0^2(1 - \sigma),$$

on pourrait facilement opérer dans les valeurs de c, de c_1 et de c_2 un changement propre à rendre le module suffisamment petit.

Considérons la partie dépendant des termes $\Delta\beta_1 G$ et $\Delta\beta_1 H$ de la fonction W, que nous avons donnée par l'équation (12). En désignant cette partie par W_1, nous aurons

$$W_1 = \frac{3}{8}\beta\Delta\beta_1(z - \delta)\int\left[G\frac{dG}{dv} + H\frac{dH}{dv}\right]dv + \frac{1}{2}\frac{\gamma\Delta\beta_1}{1 - \sigma}G,$$

ou bien:

$$W_1 = \frac{3}{8}\beta\Delta\beta_1\eta^2(z - \delta) + \frac{1}{2}\frac{\gamma\Delta\beta_1}{1 - \sigma}G, \tag{50}$$

d'où il est visible que la fonction W_1 est tout au moins du deuxième ordre par rapport au masses et du quatrième ordre par rapport aux excentricités ou aux inclinaisons, pourvu que les fonctions G et H, comme nous l'avons supposé, soient de l'ordre des excentricités.

10. Il nous reste maintenant à aborder les approximations qui suivent celle que nous avons déjà examinée; mais puisque la marche du calcul est bien indiquée par les expressions du numéro 2, nous nous dispensons de traiter ce sujet plus amplement.

Après avoir obtenu les fonctions G et H, on aura immédiatement, par une double différentiation, les fonctions M et N. Il serait donc facile de former l'expression de la fonction W, ou bien, de la développer en une série trigonométrique, dont la convergence serait incontestable, vu qu'elle ne contiendrait qu'un seul argument. De même, on obtiendrait aisément les développements des fonctions que nous avons désignées, dans le numéro 2, par $f_1(x)$ et $f_2(x)$, de sorte que l'application de la formule (16) ne présentera plus de difficulté.

Mais considérons un moment la constante h qui figure dans les formules du numéro 2, et dont l'introduction tendait à faire disparaître les termes contenant la variable x hors des signes trigonométriques. Evidemment, cette constante ne doit pas être trop petite, vu qu'autrement il se

présenterait une valeur de la constante surabondante C_2 qui n'offrirait aucune approximation.

Dans le numéro 2, nous avons établi les expressions:

$$y_1 = \frac{\nu(1-p)\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{(1-p\operatorname{cn} x)^2},$$

$$y_2 = hy_1 x + f_2(x),$$

et, d'autre part, nous avions obtenu:

$$y_2 = \frac{f_1(x)}{\nu^2(1-p)^2}\int\frac{(1-p\operatorname{cn} x)^4\,dx}{\operatorname{sn} x^2\operatorname{cn} x^2}.$$

Or, en se rappelant les formules par lesquelles s'expriment les quantités faisant partie de l'intégrale contenue dans l'expression de y_2, on s'aperçoit facilement que le coefficient de x est composé de plusieurs termes dont les plus grands sont multipliés par p^2 ou k^2. Dans l'expression de y_2, ces termes acquièrent le facteur $\frac{1}{\nu^2}$, d'où l'on conclut que la constante h sera de l'ordre de $\frac{p^2}{\nu^2}$ ou bien de l'ordre de $\frac{k^2}{\nu^2}$. Mais le facteur $\frac{p^2}{\nu^2}$ est au moins une quantité de l'ordre zéro, et il peut même devenir très grand; l'autre facteur au contraire est ordinairement une quantité très petite, qui cependant, dans les cas où k s'approche de l'unité, peut acquérir des valeurs assez considérables.

Cela étant, on voit, en considérant la formule (16), que la constante C_2, déterminée de manière à faire disparaître le coefficient de $xf_1(x)$, sera une quantité de l'ordre de $\frac{W}{\beta}$, quantité très petite par rapport à G et H. On est donc arrivé à une véritable approximation.

11. Bien que la méthode d'intégration que nous venons d'expliquer conduise toujours à un résultat tellement approximatif qu'on puisse l'adopter, dans les calculs numériques, comme résultat définitif, il est à désirer, au point de vue théorétique, qu'on trouve un mode de continuer les approximations, lorsque le procédé qui s'appuie sur l'intégration de l'équation (13) devient impraticable à cause des différentiations réitérées.

C'est pour expliquer une manière d'atteindre à une exactitude quelconque que je vais ajouter les considérations suivantes.

Désignons par G_0 et H_0 deux fonctions qui, substituées au lieu de G et de H dans les équations (3), les satisfont à très peu près. Posons ensuite:

$$G = G_0 + G_1; \qquad H = H_0 + H_1,$$

nous tirons des dites équations les suivantes:

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2G_1}{dv^2} + 2(1-\sigma)\frac{dH_1}{dv} + \left\{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3(G_0^2 + H_0^2)\right\} G_1 \\ &\qquad = \overline{G} + \frac{3}{2}\beta_3(G_0G_1 + H_0H_1)G_1 + \frac{3}{4}\beta_3(G_1^2 + H_1^2)G_1, \\ &\frac{d^2H_1}{dv^2} - 2(1-\sigma)\frac{dG_1}{dv} + \left\{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3(G_0^2 + H_0^2)\right\} H_1 \\ &\qquad = \overline{H} + \frac{3}{2}\beta_3(G_0G_1 + H_0H_1)H_1 + \frac{3}{4}\beta_3(G_1^2 + H_1^2)H_1, \end{aligned}\right.$$

$\overline{G}$ et $\overline{H}$ étant les restes des équations (3), obtenus en y mettant G_0 et H_0 au lieu de G et de H, à savoir:

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{G} &= -\frac{d^2G_0}{dv^2} - 2(1-\sigma)\frac{dH_0}{dv} - \left\{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3(G_0^2 + H_0^2)\right\} G_0 - \gamma, \\ \overline{H} &= -\frac{d^2H_0}{dv^2} + 2(1-\sigma)\frac{dG_0}{dv} - \left\{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3(G_0^2 + H_0^2)\right\} H_0. \end{aligned}\right.$$

Mais, puisque $\overline{G}$ et $\overline{H}$ sont des quantités extrêmement petites — disons par exemple tout au moins du dixième ordre relativement aux forces perturbatrices — on peut entamer le procès d'intégration des équations (51) en omettant les termes du deuxième et du troisième ordre par rapport à G_1 et H_1. Nous aurons ainsi un système d'équations dont l'intégration ne présente aucune difficulté sérieuse, si ce n'est qu'on se voie réduit à la nécessité, dans les diverses approximations, de faire disparaître les termes séculaires par des maniements pris spécialement dans ce but.

Si nous désignons par U la fonction $G_1 + iH_1$, nous tirons des équations (51), après en avoir multiplié la seconde par i, la suivante

$$(53)\quad \frac{d^2U}{dv^2} - 2i(1-\sigma)\frac{dU}{dv} + \left\{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3(G_0^2 + H_0^2)\right\}U = \overline{G} + i\overline{H},$$

où l'on a mis de côté les termes du deuxième et du troisième ordre par rapport aux quantités G_1 et H_1.

En me réservant de donner, plus loin, les détails du calcul par lequel s'obtient le développement absolu de la fonction U, je me contente, pour le moment, de signaler le résultat qui se présente tout d'abord.

Soit

$$\gamma_n e^{inw}$$

un terme de $\overline{G} + i\overline{H}$, nous admettons que n soit un très grand nombre, de sorte que le produit $n\bar{\varsigma}$ puisse être considéré comme une quantité de l'ordre zéro; soit de plus

$$g_n e^{inw}$$

le terme principal de U qui disparaît avec γ_n. Maintenant, si nous désignons par η_0 la partie constante de $G_0^2 + H_0^2$, nous aurons, en vertu de l'équation (53), le résultat que voici:

$$\left[-(n\bar{\varsigma})^2 + 2n\bar{\varsigma}(1-\sigma) + 2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0\right]g_n = \gamma_n.$$

On en obtient, sans difficulté, la valeur de g_n, qui devient généralement une quantité du même ordre que γ_n; seulement si le produit $n\bar{\varsigma}$ est très approché de $\sigma - \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{3}{8}\beta_3\eta_0 - \frac{1}{2}(n\bar{\varsigma})^2$, il en pourrait résulter une valeur assez grande et mal déterminée. Mais, n'oublions pas que nous avons négligé, dans l'équation (53), les termes du troisième ordre. Si nous en tenons compte, il résultera toujours une très petite valeur de g_n, tout au plus du même ordre que la racine cubique du rapport des coefficients γ_n et β_3.

12. Revenons encore aux cas asymptotiques.

On pourrait croire que les formules contenant des exponentielles représentent des cas proprement appartenant à notre problème, mais il

n'en est rien. Le fait est que les équations (4), certaines conditions étant satisfaites, admettent des solutions asymptotiques, ce qui, cependant, ne nécessite pas que les équations (3) ou (5) offrent de pareilles solutions. L'apparition d'une solution asymptotique nous montre seulement que la manière d'approximation dans laquelle on commence par intégrer les équations (4), ne s'applique plus, dans les cas envisagés, à l'intégration des équations (3). Nous avons déjà vu, dans le paragraphe 9, comment on peut éviter de tels cas; donc, il nous reste seulement de montrer que les approximations, enpartant d'une solution asymptotique, ne sont plus convergentes.

Dans ce but, reprenons l'équation (13). Dans l'expression de la fonction W, donnée par la formule (12), nous ne retenons que le terme

$$-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{1-\sigma}M = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{1-\sigma}\frac{d^2G}{dv^2},$$

ce qui nous donnera, si nous remplaçons la variable indépendante v par x, et que nous exprimions les coefficients au moyen des trois racines c, c_1 et c_2,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{2}\mu^2cc_1c_2 - \mu^2(c_1c_2 + cc_2 + cc_1)z + \frac{3}{2}\mu^2(c + c_1 + c_2)z^2 - 2\mu^2z^3 + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{1-\sigma}\frac{d^2G}{dx^2}.$$

Posons d'abord:

$$c_1 = c,$$

il en résultera:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{2}\mu^2c^2c_2 - \frac{1}{2}\mu^2(c^2 + 2cc_2)z + \frac{3}{2}\mu^2(2c + c_2)z^2 - 2\mu^2z^3 + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{1-\sigma}\frac{d^2G}{dx^2}.$$

Après avoir multiplié cette équation par $\frac{dz}{dx}$, on en tire, en l'intégrant, le résultat que voici:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \mu^2z(c-z)^2(c_2-z) + \frac{\gamma}{1-\sigma}\int\frac{d^2G}{dx^2}\frac{dz}{dx}dx.$$

En posant:

$$z = \frac{c}{1+\zeta^2}; \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{2c\zeta}{(1+\zeta^2)^2}\frac{d\zeta}{dx},$$

on tire de l'équation précédente:

$$\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = \frac{\mu^2 c}{4}\zeta^2(c_2 - c + c^2\zeta^2) - \frac{1}{4}\frac{\gamma(1+\zeta^2)}{(1-\sigma)c^2\zeta^2}\int\frac{d^2G}{dx^2}\frac{2c\zeta}{(1+\zeta^2)^2}\frac{d\zeta}{dx}dx.$$

Or, après avoir déterminé μ de manière à avoir:

$$\frac{\mu^2}{4}c(c_2 - c) = 1,$$

on obtiendra par différentiation:

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \zeta + \frac{2c_2}{c_2 - c}\zeta^3 + \frac{\gamma(1+\zeta^2)^3}{c(1-\sigma)\zeta^3}\int\frac{d^2G}{dx^2}\frac{\zeta}{(1+\zeta^2)^2}\frac{d\zeta}{dx}dx$$
$$- \frac{1}{4}\frac{\gamma(1+\zeta^2)^2}{c(1-\sigma)\zeta}\frac{d\zeta}{dx}\frac{d^2G}{dx^2},$$

équation qu'on ne saurait intégrer qu'au moyen d'approximations successives, dont on fait le commencement en négligeant les termes dépendant de la fonction $\frac{d^2G}{dx^2}$.

En effet, si nous désignons par ζ_0 ce que devient ζ lorsqu'on néglige $\frac{d^2G}{dx^2}$, la fonction ζ_0 s'obtient en intégrant l'équation

$$\left(\frac{d\zeta_0}{dx}\right)^2 = \zeta_0^2\left(1 + \frac{c_2}{c_2 - c}\zeta_0^2\right).$$

On en tire:

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{c_2 - c}{c_2}}\frac{2}{e^x - e^{-x}};$$

et si l'on pose:

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1,$$

l'équation du deuxième ordre en ζ_1 devient:

$$\frac{d^2\zeta_1}{dx^2} - \left\{1 + 2.3\left(\frac{2}{e^x - e^{-x}}\right)^2\right\}\zeta_1 = \frac{1}{4}\frac{\gamma}{c(1-\sigma)}\frac{(e^x + e^{-x})\left((e^x - e^{-x})^2 + 4\frac{c_2 - c}{c_2}\right)^2}{(e^x - e^{-x})^5}\frac{d^2G}{dx^2}$$

$$- \frac{\gamma}{c(1-\sigma)}\frac{\left((e^x - e^{-x})^2 + 4\frac{c_2 - c}{c_2}\right)^3}{2\left(\frac{c_2 - c}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}}(e^x - e^{-x})^3}\int\frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{\left((e^x - e^{-x})^2 + 4\frac{c_2 - c}{c_2}\right)^2}\frac{d^2G}{dx^2}dx,$$

pourvu qu'on y néglige le carré ainsi que la troisième puissance de ζ_1, et de même le produit de ζ_1 par γ.

En vertu du théorème que nous avons démontré au n° 2, on obtiendra immédiatement une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^2\zeta_1}{dx^2} - \left[1 + 2 \cdot 3\left(\frac{2}{e^x - e^{-x}}\right)^2\right]\zeta_1 = 0,$$

à savoir celle-ci:

$$y_1 = \zeta_1 = \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

L'autre intégrale s'obtient à l'aide de la formule

$$y_2 = \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}\int\frac{(e^x - e^{-x})^4 dx}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

En intégrant par parties, il viendra:

$$\int\frac{(e^x - e^{-x})^4 dx}{(e^x + e^{-x})^2} = -\frac{(e^x - e^{-x})^3}{e^x + e^{-x}} + \frac{3}{2}(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) - 6x,$$

de sorte qu'on aura:

$$y_2 = -(e^x - e^{-x}) + \frac{3}{2}\frac{(e^x + e^{-x})^2}{e^x - e^{-x}} - 6x\frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

Pour mettre en évidence l'expression complète de la fonction ζ_1, il faut encore chercher le développement de $\frac{d^2G}{dx^2}$. Dans ce but, reprenons l'équation (42), et différentions-la deux fois. Nous aurons ainsi:

$$\frac{d^2G}{dx^2} = -\frac{3}{8}\frac{\delta}{\varepsilon}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{3}{8\varepsilon}\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dx^2}\right] = \frac{3}{8}\frac{z-\delta}{\varepsilon}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{3}{8\varepsilon}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2.$$

En portant dans cette formule les expressions

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2c(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2 + 4\frac{c_2 - c}{c_2}} - \frac{2c(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})^3}{\left[(e^x - e^{-x})^2 + 4\frac{c_2 - c}{c_2}\right]^2},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2c(e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2 + 4\frac{c_2 - c}{c_2}} + (e^x - e^{-x})^2F,$$

F étant une fonction de x ne devenant pas infinie pour x égal à zéro, nous aurons, en ne retenant, dans l'expression de $\frac{d^2G}{dx^2}$, que le terme qui reste fini lorsque x disparaît:

$$\frac{d^2G}{dx^2} = -\frac{3\,\delta}{8\,\varepsilon}\,\frac{2c(e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2 + 4\,\frac{c_2 - c}{c_2}}.$$

Maintenant, si nous cherchons l'expression complète de ζ_1, nous y trouverons nécessairement des termes multipliés par des puissances positives de $\frac{1}{e^x - e^{-x}}$, ce qui montre que la fonction ζ_1 devient infinie, si x est égal à zéro. De là on conclut que la solution asymptotique donnant la fonction z exprimée en exponentielles, ne peut pas être regardée comme une vraie approximation.

§ 3. *Deuxième méthode.*

1. L'emploi des fonctions elliptiques à l'intégration de l'équation dont il s'agit, est d'autant plus important que les développements qui en résultent s'appliquent également à la recherche de l'intégrale des équations avec plusieurs termes tout connus. Si cette idée était réalisée, on serait porté à faire l'application des formules les plus simples et les plus claires; et puis, il y aurait lieu de mettre en usage diverses expressions selon la nature numérique de l'équation proposée. C'est pour avoir les expressions les plus variées représentant la solution de notre problème que je vais la traiter encore par deux méthodes différentes.

Pour point de départ des recherches du présent paragraphe nous prenons les équations (5) du paragraphe précédent, à savoir:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} 2(1-\sigma)\frac{dH}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]G &= -\gamma + M, \\ -2(1-\sigma)\frac{dG}{dv} + \left[2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right]H &= N. \end{aligned}\right.$$

On peut les intégrer de la manière que nous allons montrer maintenant.

En désignant par $\Delta\beta$ l'incrément qu'il faut ajouter à β_1 pour avoir, dans les diverses approximations, des résultats dépourvus de tout terme séculaire, et en posant:

$$\frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2 - \Delta\beta}{2(1-\sigma)} = 2\frac{d\theta}{dv}, \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{-i\gamma + iM - N - i(G+iH)\Delta\beta}{2(1-\sigma)} = P, \\ &\frac{i\gamma - iM - N + i(G-iH)\Delta\beta}{2(1-\sigma)} = Q, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

on tire des équations (1) les suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dG}{dv} + i\frac{dH}{dv} + 2i\frac{d\theta}{dv}(G+iH) = P, \\ &\frac{dG}{dv} - i\frac{dH}{dv} - 2i\frac{d\theta}{dv}(G-iH) = Q, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

En se rappelant les notations introduites dans le n° 1 du paragraphe précédent, on déduit facilement de l'équation (2) la relation

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{3}{16}\beta(z-\delta) - \frac{\Delta\beta}{4(1-\sigma)} \tag{5}$$

qui sert au calcul de θ, si la fonction z est connue.

La fonction θ déterminée, les intégrales des équations (4) s'expriment au moyen des formules que voici:

$$\left\{\begin{aligned} &G + iH = e^{-2i\theta}\left\{e_1 + \int e^{2i\theta}\, P dv\right\}, \\ &G - iH = e^{2i\theta}\ \left\{e_1 + \int e^{-2i\theta} Q dv\right\}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

e_1 étant une arbitraire qui devient identique avec la constante e_0 aussitôt que P et Q disparaissent.

Cherchons toutefois de déterminer la fonction θ d'une manière directe.

2. Multipliant membre à membre les équations (6), on aura, en se rappelant la relation

$$G^2 + H^2 = \eta^2,$$

la formule ci-dessous:

$$(7) \qquad \eta^2 = e_1^2 + e_1\int\{e^{2i\theta}Pdv + e^{-2i\theta}Qdv\} + \left[\int e^{2i\theta}Pdv\right]\left[\int e^{-2i\theta}Qdv\right].$$

En différentiant cette formule, après l'avoir multipliée par $\frac{3}{16}\frac{\beta_3}{1-\sigma}$, nous aurons:

$$(8) \qquad \frac{d^2\theta}{dv^2} = -\frac{3}{16}\frac{\beta_3 e_1}{1-\sigma}\{e^{2i\theta}Pdv + e^{-2i\theta}Qdv\} - \frac{3}{16}\frac{\beta_3}{1-\sigma}X,$$

où l'on s'est servi de la notation

$$(9) \qquad X = e^{2i\theta}P\int e^{-2i\theta}Qdv + e^{-2i\theta}Q\int e^{2i\theta}Pdv.$$

D'un autre côté, nous avons, en vertu de la première des équations 7 (§ 2),

$$\frac{d\eta^2}{dv} = -\frac{\gamma}{1-\sigma}H + \frac{MH - NG}{1-\sigma}.$$

Maintenant, si l'on introduit l'expression de H tirée des équations (6), à savoir:

$$H = i\frac{e_1}{2}(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) + \frac{i}{2}\left\{e^{2i\theta}\int e^{-2i\theta}Qdv - e^{-2i\theta}\int e^{2i\theta}Pdv\right\}$$

et qu'on multiplie l'équation précédente par $\frac{3}{16}\frac{\beta_3}{1-\sigma}$, il en résulte:

$$\begin{aligned}(10) \qquad \frac{d^2\theta}{dv^2} &= i\frac{3}{32}\beta\gamma e_1(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) \\ &+ i\frac{3}{32}\beta\gamma\left\{e^{2i\theta}\int e^{-2i\theta}Qdv - e^{-2i\theta}\int e^{2i\theta}Pdv\right\} \\ &- \frac{3}{16}\beta(MH - NG).\end{aligned}$$

L'équation que nous venons de trouver doit être identique avec l'équation (8), mais la forme de l'équation (10) étant plus convenable aux applications que ne l'est cette équation, nous admettons la dernière comme fondement des recherches suivantes.

En observant les relations

$$d[e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}] = 2i[e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}]d\theta,$$

$$d\left\{e^{2i\theta}\int e^{-2i\theta} Qdv + e^{-2i\theta}\int e^{2i\theta} Pdv\right\}$$

$$= 2i\left\{e^{2i\theta}\int e^{-2i\theta}Qdv - e^{-2i\theta}\int e^{2i\theta} Pdv\right\}d\theta + (P + Q)dv,$$

on tire immédiatement de l'équation (10) la suivante:

$$2\frac{d^2\theta}{dv^2}\frac{d\theta}{dv} = \frac{3}{32}\beta\gamma e_1 \frac{d(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})}{dv}$$

$$+ \frac{3}{32}\beta\gamma \frac{d\left\{e^{2i\theta}\int e^{-2i\theta}Qdv + e^{-2i\theta}\int e^{2i\theta}Pdv\right\}}{dv}$$

$$- \frac{3}{32}\beta\gamma(P + Q) - \frac{3}{8}\beta(MH - NG)\frac{d\theta}{dv},$$

dont l'intégrale, en désignant l'arbitraire par h, s'exprime ainsi:

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = h + \frac{3}{32}\beta\gamma e_1(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \tag{11}$$

$$+ \frac{3}{32}\beta\gamma\left\{e^{2i\theta}\int e^{-2i\theta}Qdv + e^{-2i\theta}\int e^{2i\theta}Pdv\right\}$$

$$-\frac{3}{8}\beta\int[MH - NG]\frac{d\theta}{dv}dv - \frac{3}{32}\beta\gamma\int[P + Q]dv.$$

Etant arrivé à ce résultat, il sera facile de rétablir l'équation (13) du paragraphe précédent, ce qui deviendra utile pour la comparaison de la méthode du paragraphe présent avec celle que nous avons déjà exposée.

En effet, par la différentiation de l'équation (10), on aura tout de suite:

$$\frac{d^3\theta}{dv^3} = -2\frac{3}{32}\beta\gamma e_1(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})\frac{d\theta}{dv}$$

$$- 2\frac{3}{32}\beta\gamma\left\{e^{2i\theta}\int e^{-2i\theta}Qdv + e^{-2i\theta}\int e^{2i\theta}Pdv\right\}\frac{d\theta}{dv}$$

$$+ i\frac{3}{32}\beta\gamma(Q - P) - \frac{3}{16}\beta\frac{d(MH - NG)}{dv};$$

et, si l'on ajoute cette équation à l'équation (11), multipliée par $2\frac{d\theta}{dv}$, il en résulte

$$\frac{d^3\theta}{dv^3} + 2\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^3 = 2h\frac{d\theta}{dv} + i\frac{3}{32}\beta\gamma(Q-P) - \frac{3}{4}\beta Y, \tag{12}$$

où, pour abréger l'écriture, on a employé la notation que voici:

$$Y = \frac{d\theta}{dv}\int [MH - NG]\frac{d\theta}{dv}dv + \frac{1}{4}\frac{d\theta}{dv}\gamma\int(P+Q)dv + \frac{1}{4}\frac{d(MH-NG)}{dv}. \tag{13}$$

L'équation que nous venons de trouver n'est au fond autre chose que l'équation citée du paragraphe précédent, ce qui pourrait être démontré, si après avoir fait $\Delta\beta$ égal à zéro, on introduit dans l'équation (12) la valeur du rapport $\frac{d\theta}{dv}$ selon la formule (5). L'identité des deux équations se manifeste immédiatement, pourvu que la constante h soit donnée par la formule:

$$h = \left(\frac{3}{16}\beta\right)^2\delta^2 - \frac{3}{16}\beta\gamma e_0.$$

Ayant, de cette manière, déterminé la constante introduite par l'intégration, on pourra utiliser l'équation (11) pour en déduire quelques propriétés de la fonction θ.

3. Si l'on néglige, dans les équations (3), les quantités M et N, et que l'on y introduise les expressions de $G + iH$ et de $G - iH$ que donnent les formules (6), on sera conduit à deux équations linéaires du premier ordre, desquelles on obtient, en les intégrant, les expressions

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \int e^{2i\theta}P\,dv &= -\frac{i}{2(1-\sigma)}e^{-i\frac{\Delta\beta}{2(1-\sigma)}v}\int e^{i\frac{\Delta\beta}{2(1-\sigma)}v}\{\gamma e^{2i\theta} + e_1\Delta\beta\}dv,\\ \int e^{-2i\theta}Q\,dv &= \frac{i}{2(1-\sigma)}e^{i\frac{\Delta\beta}{2(1-\sigma)}v}\int e^{-i\frac{\Delta\beta}{2(1-\sigma)}v}\{\gamma e^{-2i\theta} + e_1\Delta\beta\}dv.\end{aligned}\right.$$

Reprenons le développement (20) du § 1, à savoir:

$$\eta^2 = \eta_0 + \eta_1 \cos w + \eta_2 \cos 2w + \ldots,$$

l'angle w étant toujours donné par la formule

$$w = f - f_1,$$

d'où il suit:

$$\frac{dw}{dv} = \sigma - \varsigma = \bar{\varsigma}.$$

Admettons de plus le développement

$$\theta = \theta_0 w + \theta_1 \sin w + \theta_2 \sin 2w + \ldots,$$

ou bien celui-ci:

$$\frac{d\theta}{dv} = \bar{\varsigma}\{\theta_0 + \theta_1 \cos w + 2\theta_2 \cos 2w + \ldots\}.$$

En introduisant le développement de η^2 ainsi que celui de $\frac{d\theta}{dv}$ dans l'équation (2), nous aurons les relations suivantes entre les η et les θ:

$$2\bar{\varsigma}\theta_0 = \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 - \Delta\beta}{2(1 - \sigma)},$$

$$2\bar{\varsigma}\theta_1 = -\frac{3}{8}\frac{\beta_3}{1 - \sigma}\eta_1,$$

$$2 \cdot 2\bar{\varsigma}\theta_2 = -\frac{3}{8}\frac{\beta_3}{1 - \sigma}\eta_2,$$

etc.

Puisque nous n'avons considéré qu'un seul terme connu, les fonctions G et H ne doivent dépendre que d'un seul argument, à savoir de w; de là résulte la nécessité de déterminer le coefficient θ_0 d'une manière telle que tout argument illégitime soit chassé. Le coefficient dont il s'agit peut être choisi de deux façons différentes.

D'abord, la condition dont nous avons fait mention serait satisfaite si nous mettions:

$$\theta_0 = \frac{1}{2},$$

ce qui entraînerait:

$$\varsigma = \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 - \Delta\beta}{2(1-\sigma)}.$$

Soit, pour abréger,

$$\frac{\Delta\beta}{2(1-\sigma)} = \lambda;$$

la somme $\bar{\varsigma} + \lambda$ est donc évidemment indépendante de $\Delta\beta$.

Mais afin d'éviter les arguments superflus, on pourrait aussi mettre:

$$\theta_0 = 0,$$

hypothèse qui s'exprime aussi par l'équation

$$\frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 - \Delta\beta}{2(1-\sigma)} = 0$$

mais qui ne conduit pas, immédiatement, à la formule d'où résulte le coefficient $\bar{\varsigma}$.

Dans l'équation de condition que nous avons mise en évidence, l'incrément $\Delta\beta$ n'est point arbitraire; il est au contraire déterminé par la condition que, des formules (14) doivent résulter de petites valeurs ne contenant aucun terme séculaire. On conclut de ce fait que la constante e_1 n'est plus arbitraire, mais qu'elle s'obtient à l'aide d'une certaine condition. En revanche, on verra naître, par le procès d'intégration, un nouveau terme, dont le coefficient est arbitraire et dont l'argument contient le facteur que nous désignons par $\bar{\varsigma}$.

Arrivé à ce point, on se rappellera l'analogie avec le cas ordinaire de la libration, mais on s'apercevra toutefois d'une différence distincte. Dans le cas de la libration des mouvements moyens, il s'agit toujours de remplacer un argument astronomique par un nouvel argument; dans le cas dont nous nous occupons ici c'est le mode de calcul et la place de l'arbitraire qui changent. Ce changement ne peut, cependant, se présenter que dans le cas d'une très petite valeur de la constante h.

Il faut donc considérer deux cas séparément: commençons par adopter la valeur $\frac{1}{2}$ du coefficient θ_0.

4. Lorsque la fonction θ renferme un terme séculaire, le développement des fonctions qui entrent dans les formules (14), s'exprime sous la forme que voici:

$$(15) \qquad e^{\pm 2i\theta} = e^{\pm iw}\{B_0 + B_1 \cos w + B_2 \cos 2w + \ldots \pm iA_1 \sin w \pm iA_2 \sin 2w \pm \ldots\}.$$

En effet, le développement que nous avons admis, résulte immédiatement de ce que:

$$e^{\pm 2i\theta} = e^{\pm iw}\Big\{1 \pm 2i\theta_1 \sin w \pm 2i\theta_2 \sin 2w \pm \ldots - \frac{4}{1.2}[\theta_1 \sin w + \theta_2 \sin 2w + \ldots]^2 \mp \frac{8i}{1.2.3}[\theta_1 \sin w + \theta_2 \sin 2w + \ldots]^3 + \ldots\Big\},$$

d'où l'on tire facilement les expressions des coefficients A et B. En voici les premières:

$$B_0 = 1 - \theta_1^2 - \theta_2^2 - \ldots + \frac{1}{4}(\theta_1^4 + \theta_2^4 + \ldots) + (\theta_1^2\theta_2^2 + \theta_1^2\theta_3^2 + \theta_2^2\theta_3^2 + \ldots),$$

$$A_1 = 2\theta_1 - \theta_1^3 - 2\theta_1\theta_2^2 + \theta_1^2\theta_3 + \ldots,$$

$$B_1 = -2\theta_1\theta_2 - 2\theta_2\theta_3 - \ldots,$$

$$A_2 = 2\theta_2 - 2\theta_1^2\theta_2 + \ldots,$$

$$B_2 = \theta_1^2 - 2\theta_1\theta_3 + \theta_1^2\theta_2^2 + \ldots,$$

etc.

Or le développement que nous venons d'établir s'écrit aussi de la manière suivante:

$$(15') \qquad e^{\pm 2i\theta} = -\frac{1}{2}(A_1 - B_1) + B_0 e^{\pm iw} - \frac{1}{2}(A_2 - B_2)e^{\mp iw} + \frac{1}{2}(A_1 + B_1)e^{\pm 2iw} - \frac{1}{2}(A_3 - B_3)e^{\mp 2iw} + \ldots,$$

expression que nous allons introduire dans les équations (14).

Maintenant, si l'on choisit l'incrément $\Delta\beta$ de manière à détruire le coefficient de $e^{i\lambda v}$ ou de $e^{-i\lambda v}$ dans les équations (14), il faut satisfaire à la condition

$$(16) \qquad -\frac{\gamma}{2}(A_1 - B_1) + e_1 \Delta\beta = 0,$$

ce qui nous conduit aux expressions suivantes:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \int e^{2i\theta} P dv = &- \frac{\gamma B_0 e^{iw}}{2(1-\sigma)(\bar\varsigma + \lambda)} - \frac{\gamma(A_1 + B_1)e^{2iw}}{4(1-\sigma)(2\bar\varsigma + \lambda)} - \ldots \\ &+ \frac{\gamma(A_2 - B_2)e^{-iw}}{4(1-\sigma)(-\bar\varsigma + \lambda)} + \frac{\gamma(A_3 - B_3)e^{-2iw}}{4(1-\sigma)(-2\bar\varsigma + \lambda)} + \ldots \\ \int e^{-2i\theta} Q dv = &- \frac{\gamma B_0 e^{-iw}}{2(1-\sigma)(\bar\varsigma + \lambda)} - \frac{\gamma(A_1 + B_1)e^{-2iw}}{4(1-\sigma)(2\bar\varsigma + \lambda)} - \ldots \\ &+ \frac{\gamma(A_2 - B_2)e^{iw}}{4(1-\sigma)(-\bar\varsigma + \lambda)} + \frac{\gamma(A_3 - B_3)e^{2iw}}{4(1-\sigma)(-2\bar\varsigma + \lambda)} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Ayant obtenu ces résultats, on peut tirer des équations que nous avons établies dans les pages précédentes, quelques observations importantes. D'abord, en introduisant les développements (17) dans l'expression (7), et ne mettant en évidence que le terme constant du résultat, nous aurons:

$$(18) \qquad \eta_0 = e_1^2 + \frac{\gamma^2 B_0^2}{4(1-\sigma)^2(\bar\varsigma + \lambda)^2} + \frac{\gamma^2(A_1 + B_1)^2}{16(1-\sigma)^2(2\bar\varsigma + \lambda)^2} + \ldots.$$

Mais, d'un autre côté, nous nous rappelons les relations

$$\bar\varsigma + \lambda = \frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_2\eta_0}{2(1-\sigma)},$$

$$\lambda = \frac{\gamma(A_1 - B_1)}{4e_1(1-\sigma)}.$$

de sorte que la détermination des quantités η_0 et $\bar\varsigma + \lambda$ peut s'effectuer, les $B_0, A_1, B_1, \ldots$ étant connus; et bien que la supposition qu'on connaisse d'avance ces coefficients ne soit pas légitime, on peut très souvent commencer les approximations en faisant:

$$B_0 = 1$$

et en négligeant les autres coefficients, ce qui nous donnerait des valeurs approchées de η_0 et de $\bar{\varsigma}$.

Cela supposé, nous retombons dans une équation du troisième degré en $\bar{\varsigma} + \lambda$ ou en η_0. Si l'on se sert de la notation

$$\frac{\delta_1}{1-\sigma} = \frac{4}{3}\frac{2\sigma - \sigma^2 - \beta_1}{\beta_3} - e_1^2,$$

l'équation en $\bar{\varsigma} + \lambda$ devient:

$$\bar{\varsigma} + \lambda - \frac{3}{8}\beta\delta_1 = -\frac{3}{32}\frac{\beta\gamma^2}{(1-\sigma)(\bar{\varsigma}+\lambda)^2}.$$

De cette équation on conclut facilement que la somme $\bar{\varsigma} + \lambda$ est dans les cas ordinaires une quantité du même ordre que β_1 ou β_3, mais qu'elle devient tout au plus de l'ordre de

$$\beta_3^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}},$$

si δ_1 est très petit. Posons donc:

$$\bar{\varsigma} + \lambda = -f\beta_3^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}},$$

f étant un coefficient dont la valeur numérique ne devient jamais très petite, et nous aurons:

$$\frac{\gamma}{\bar{\varsigma}+\lambda} = -\frac{1}{f}\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

d'où il s'ensuit que le rapport $\frac{\gamma}{\bar{\varsigma}+\lambda}$ s'évanouit avec γ.

Maintenant, il serait facile d'établir des expressions approchées des coefficients $\theta_1, \theta_2, \ldots$; cependant nous ne nous arrêterons pas à ce point. Toutefois il importe de remarquer que le développement (18) est toujours convergent, vu que la valeur numérique de la quantité λ est sensiblement au dessous de celle de $\bar{\varsigma}$.

5. Revenons à l'équation (11). En y négligeant les termes dépendant des fonctions M et N, ainsi que la somme $P + Q$, qui est à peu près égale à N, elle prend la forme

$$(19)\qquad \left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = h + \frac{3}{16}\beta\gamma e_1 \cos 2\theta + \frac{3}{32}\frac{\beta\gamma B_0^2}{f(1-\sigma)}\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} + \ldots$$

$$+ \text{ termes périodiques.}$$

Si maintenant le coefficient δ était tellement petit qu'il fût comparable au carré de e_1 ou de e_0, la partie constante de la formule précédente pourrait bien être très petite par rapport au coefficient de $\cos 2\theta$, ou même négative. Ensuite, puisque les coefficients des termes périodiques, qui ne sont pas mis en évidence dans notre formule, sont très petits en comparaison de celui de $\cos 2\theta$, ce qui est facile à voir en considérant les équations (17), il résulterait une valeur négative de $\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2$, toutes les fois que la fonction θ excèderait certaines limites.

Les circonstances étant telles, on retomberait dans le second cas, où il faudrait adopter:

$$\theta_0 = 0.$$

Maintenant nous commençons par signaler le développement

$$e^{\pm 2i\theta} = B_0 + B_1 \cos w + B_2 \cos 2w + \ldots$$
$$\pm iA_1 \sin w \pm iA_2 \sin 2w \pm \ldots,$$

où l'on a utilisé les notations du n° 4.

D'abord, il est bien évident qu'on doit déterminer l'incrément $\Delta\beta$ en satisfaisant à la condition

$$B_0\gamma + e_1 \Delta\beta = 0. \tag{20}$$

Cela posé, on déduit des équations (14) les formules:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
\int e^{2i\theta} P dv &= -\frac{i\gamma}{2(1-\sigma)} \sum_1^\infty \frac{n\bar{\varsigma} B_n - \lambda A_n}{(n\bar{\varsigma})^2 - \lambda^2} \sin nw \\
&\quad - \frac{\gamma}{2(1-\sigma)} \sum_1^\infty \frac{n\bar{\varsigma} A_n - \lambda B_n}{(n\bar{\varsigma})^2 - \lambda^2} \cos nw, \\
\int e^{-2i\theta} Q dv &= \frac{i\gamma}{2(1-\sigma)} \sum_1^\infty \frac{n\bar{\varsigma} B_n - \lambda A_n}{(n\bar{\varsigma})^2 - \lambda^2} \sin nw \\
&\quad - \frac{\gamma}{2(1-\sigma)} \sum_1^\infty \frac{n\bar{\varsigma} A_n - \lambda B_n}{(n\bar{\varsigma})^2 - \lambda^2} \cos nw,
\end{aligned}\right.$$

qui serviront en première ligne à la recherche de l'expression de la fonction η^2. Il s'agit avant tout d'en former la partie constante. La voici:

$$\eta_0 = e_1^2 + \frac{\gamma^2}{8(1-\sigma)^2}\sum_1^\infty\left\{\left(\frac{n\bar{\varsigma}B_n - \lambda A_n}{(n\bar{\varsigma})^2-\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{n\bar{\varsigma}A_n - \lambda B_n}{(n\bar{\varsigma})^2-\lambda^2}\right)^2\right\}. \tag{22}$$

En vertu de cette valeur de η_0 et de celle de $\Delta\beta$ tirée de l'équation (20), on déduit de la condition

$$2\sigma - \sigma^2 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta_0 - \Delta\beta = 0$$

l'équation suivante du troisième degré en e_1

$$\begin{aligned} e_1^2 - \frac{4}{3}\frac{B_0\gamma}{\beta_3 e_1} - \frac{4}{3\beta_3}(2\sigma - \sigma^2 - \beta_1) \\ + \frac{\gamma^2}{8(1-\sigma)^2}\sum_1^\infty\left\{\left(\frac{n\bar{\varsigma}B_n - \lambda A_n}{(n\bar{\varsigma})^2-\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{n\bar{\varsigma}A_n - \lambda B_n}{(n\bar{\varsigma})^2-\lambda^2}\right)^2\right\} = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

d'où s'obtient le coefficient e_1, qui ne doit plus être considéré comme une constante arbitraire.

Pour déterminer, dans le cas actuel, le coefficient $\bar{\varsigma}$, ainsi que pour faire ressortir la constante arbitraire, reprenons l'équation (11). En n'y considérant, dans une première approximation, que les premiers termes, nous aurons

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = h + \frac{3}{16}\beta\gamma e_1 - 2\frac{3}{16}\beta\gamma e_1 \sin\theta^2; \tag{24}$$

et si nous introduisons, au lieu de θ, une nouvelle fonction donnée par la formule

$$\sin\theta = l\sin\varphi,$$

où l'on a admis la notation

$$l = \sqrt{\frac{h + \frac{3}{16}\beta\gamma e_1}{2\frac{3}{16}\beta\gamma e_1}}, \tag{25}$$

l'équation précédente se transforme en celle-ci:

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = \left(h + \frac{3}{16}\beta\gamma e_1\right)\cos\varphi^2.$$

Mais puisqu'on a:

$$d\theta = \frac{l\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - l^2\sin\varphi^2}},$$

il résultera finalement:

$$\frac{d\varphi}{dv} = \sqrt{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1}\sqrt{1 - l^2\sin\varphi^2},$$

le module l pouvant être considéré comme une constante arbitraire, vu qu'il dépend de l'arbitraire e_0 contenue dans δ.

En désignant par

$$-\sqrt{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1}\, v_0$$

la partie constante de l'argument, la fonction φ s'exprime par une fonction elliptique de la variable

$$u = \sqrt{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1}\,(v - v_0),$$

et son développement en série trigonométrique procède suivant les multiples de

$$\frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1}\,(v - v_0),$$

L étant l'intégrale elliptique complète de première espèce.

Il s'ensuit de là que le coefficient nommé $\bar{\varsigma}$ s'exprime par la formule

$$\bar{\varsigma} = \frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1}.$$

Rassemblons les résultats du calcul précédent. Les voici:

$$\sin\theta = l\,\mathrm{sn}\,u,$$

$$\cos\theta = \mathrm{dn}\,u;$$

et on en tire encore:

$$\sin 2\theta = 2l \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2l^2 \operatorname{sn} u^2.$$

Après avoir établi ces formules, on trouve sans difficulté les développements de la fonction $e^{\pm 2i\theta}$, qui nous permettent de calculer les termes non considérés jusqu'ici dans les équations (10) et (11).

En considérant la valeur

$$h = \left(\frac{3}{16}\beta\right)^2 \delta^2 - \frac{3}{16}\beta\gamma e_0,$$

on aura, au moyen de la formule (25), l'expression suivante de l:

$$l = \pm\, \delta \sqrt{\frac{3}{32}\frac{\beta}{\gamma e_1}} \sqrt{1 - \frac{16}{3}\frac{\gamma(e_0 - e_1)}{\beta\delta^2}}, \tag{25'}$$

d'où il est visible que la valeur de l très rarement, c'est à dire seulement dans le cas d'une très petite valeur de δ, reste moindre que l'unité. Mais le coefficient δ étant généralement une quantité de l'ordre zéro, on retombe, le plus souvent, dans le premier cas.

Mais il faut avant tout se rappeler que la formule établie donnant la valeur de l n'est qu'approchée. En effet, en désignant par k le réciproque du module l, nous aurons en vertu de l'équation (19)

$$k^2 = \frac{\frac{3}{8}\beta\gamma e_1}{h + \frac{3}{16}\beta\gamma e_1 + \frac{3}{32}\frac{\beta\gamma}{1-\sigma}\frac{B_0^2}{f}\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}}}, \tag{26}$$

résultat qui diffère, par le dernier terme du dénominateur, de celui qui s'ensuit de la formule (25).

Donc, les résultats que nous venons d'obtenir dans les deux cas considérés séparément, ne s'approchant pas l'un de l'autre dans un cas intermédiaire, examinons si, en partant de l'équation

$$\frac{d^2 V_0}{dv^2} = -\frac{3}{16}\beta\gamma e_1 \sin 2V_0, \tag{27}$$

on pourrait parvenir, au moyen d'approximations successives, à l'intégrale exacte de l'équation (10).

6. Les recherches que nous allons aborder, et dont le but a été signalé tout à l'heure, reposent sur les résultats généraux que j'ai donnés, dans le mémoire de 1887, relativement aux intégrales des équations du même type que celui de l'équation (10). En conséquence, il me suffit de renvoyer le lecteur, quant à ces résultats, au dit mémoire, et de n'en alléguer que ce qui s'applique aux recherches présentes.

Dans ce but écrivons l'équation (10) de la manière suivante:

$$\frac{d^2\theta}{dv^2} = -\frac{3}{16}\beta\gamma e_1 \sin 2\theta - \frac{3}{16}\frac{\beta\gamma}{f}\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} W, \tag{28}$$

et supposons-y la fonction W donnée par le développement que voici:

$$W = \mathrm{w}_1 \sin w + \mathrm{w}_2 \sin 2w + \ldots,$$

les $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots$ étant des coefficients constants tout au plus de l'ordre zéro.

Ensuite, si nous posons:

$$\theta = V_0 + V_1,$$

et que nous désignions par $h_2, h_4, \ldots$ les parties constantes des fonctions $V_1^2, V_1^4, \ldots$, il sera facile d'opérer la décomposition de l'équation (28) dans les deux équations qui suivent

$$\frac{d^2 V_0}{dv^2} = -\alpha^2 \sin V_0 \cos V_0, \tag{27'}$$

où l'on a admis la notation

$$\alpha^2 = \frac{3}{8}\beta\gamma e_1\left\{1 - \frac{4h_2}{1.2} + \frac{16h_4}{1.2.3.4} - \ldots\right\},$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d^2V_1}{dv^2} - \alpha^2(2\sin V_0^2 - 1)V_1 = &-\frac{3}{16}\frac{\beta\gamma}{f}\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} W \\ &- \frac{3}{8}\beta\gamma e_1\left\{-\frac{4(V_1^2 - h_2)}{1.2} + \frac{16(V_1^4 - h_4)}{1.2.3.4} - \ldots\right\}\sin V_0 \cos V_0 \\ &- \frac{3}{8}\beta\gamma e_1\left\{\frac{4V_1^3}{1.2.3} - \frac{16V_1^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right\}(2\sin V_0^2 - 1) \\ &+ \frac{3}{8}\beta\gamma e_1\left\{\frac{4h_2}{1.2} - \frac{16h_4}{1.2.3.4} + \ldots\right\}(2\sin V_0^2 - 1)V_1.\text{ [1]}\end{aligned} \tag{29}$$

[1] Les termes de la quatrième ligne m'ont échappé dans mon mémoire: *Untersuchungen* etc.; p. 236.

On trouve, dans le mémoire mentionné, l'intégrale de l'équation (27'), mise sous deux formes différentes correspondant aux deux cas que nous venons d'envisager dans les pages précédentes.

D'abord, si le module k était moindre que l'unité, sa valeur s'obtiendrait au moyen de la formule

$$k\frac{K}{\pi} = \frac{a}{\varsigma}, \tag{30}$$

et la fonction V_0 s'exprimerait par la formule

$$V_0 = \operatorname{am}\frac{K}{\pi}w;$$

mais si, au contraire, k excédait l'unité, on aurait

$$\sin V_0 = l \operatorname{sn}\frac{2L}{\pi}w.$$

En portant ces résultats dans l'équation (29), et en écrivant, pour rapprocher les notations de celle de mon mémoire de 1887,

$$\frac{K}{\pi}w = \xi; \qquad \frac{2L}{\pi}w = \eta,$$

nous obtenons

$$\frac{d^2V_1}{d\xi^2} - (2k^2 \operatorname{sn}\xi^2 - k^2)V_1 = -\frac{3}{4}\frac{\beta\gamma}{f\varsigma^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}}W + \ldots \tag{31}$$

et

$$\frac{d^2V_1}{d\eta^2} - (2l^2 \operatorname{sn}\eta^2 - 1)V_1 = -\frac{3}{16}\frac{\beta\gamma}{fa^2}\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}}W + \ldots. \tag{32}$$

Or cette dernière équation se remplace par la suivante

$$\frac{d^2V_1}{d\eta^2} - (2l^2 \operatorname{sn}\eta^2 - 1)V_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{f_1e_1}\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}}W + \ldots, \tag{32'}$$

pourvu qu'on admette la notation que voici:

$$f_1 = f\left(1 - \frac{4h_2}{1.2} + \frac{16h_4}{1.2.3.4} - \ldots\right).$$

7. En utilisant les formules que j'ai données dans le mémoire de 1887, partie III, les intégrales des équations (31) et (32') s'obtiennent immédiatement. Il résulte de l'équation (31)

$$
\begin{aligned}
(33)\qquad V_1 &= c_1 \operatorname{dn}\xi + c_2 \operatorname{dn}\xi \left| \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} + \frac{E}{K}\xi \right| \\
&\quad - \frac{3}{4}\frac{\beta\gamma}{f\varsigma^2 k'^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} \left| \operatorname{dn}\xi \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} \int W \operatorname{dn}\xi d\xi \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \operatorname{dn}\xi \int W \operatorname{dn}\xi \frac{d\log\theta_1(\xi)}{d\xi} d\xi \right| \\
&\quad - \frac{3}{4}\frac{\beta\gamma}{f\varsigma^2 k'^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{E}{K} \operatorname{dn}\xi \int d\xi \int W \operatorname{dn}\xi d\xi.
\end{aligned}
$$

Maintenant, si nous remplaçons dans cette expression $d\xi$ par $\frac{K}{\pi} dw$, et que nous y introduisions les développements des fonctions $\operatorname{dn}\xi$ et $\operatorname{dn}\xi \frac{d\log\theta_1(\xi)}{d\xi}$ suivant les multiples de $\frac{\pi}{K}\xi = w$, il est aisé de voir que le procès d'intégration ne produit aucun agrandissement des termes de la fonction W (à l'exception de celui qui peut résulter de la multiplication par le facteur commun) mais bien qu'il fait sortir l'argument w ou ξ hors des signes trigonométriques. Cependant, en attribuant à la constante surabondante c_2 une valeur convenable, il sera très facile de faire disparaître les termes de cette nature; il reste seulement à examiner la grandeur de cette constante.

En ne considérant que les premiers termes des divers développements, nous avons:

$$W = \mathrm{w}_1 \sin w,$$

$$\operatorname{dn}\xi = \frac{\pi}{2K} + \frac{\pi}{2K}\frac{4q}{1+q^2}\cos w,$$

$$\operatorname{dn}\xi \frac{d\log\theta_1(\xi)}{d\xi} = -4q \sin w,$$

d'où l'on obtient l'expression du terme affecté du facteur ξ. La voici:

$$-\frac{3}{2}\frac{\beta\gamma}{f\varsigma^2 k'^2}\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{w}_1\, q\xi \operatorname{dn}\xi.$$

Evidemment, le coefficient de $\xi \operatorname{dn} \xi$ dans cette expression doit être égal à $c_2 \frac{E}{K}$, afin que les termes contenant le facteur ξ se détruisent. Il en résulte la valeur

$$c_2 = \frac{3}{2} \frac{\beta\gamma}{f\varsigma^2 k'^2} \left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{K}{E} \mathrm{w}_1 q,$$

qui s'écrit aussi de la manière suivante

$$(34) \qquad c_2 = \frac{4a^2}{f_1 \varsigma^2 k'^2 e_1} \left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{K}{E} \mathrm{w}_1 q$$

$$= \frac{k^2}{f_1 k'^2 e_1} \left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{K}{E} \mathrm{w}_1 q.$$

Par cette expression il est visible que la constante c_2 est, dans les cas les plus fréquents, une quantité très petite, mais que, si la valeur du module devient très approchée de l'unité, elle peut acquérir des valeurs assez considérables. Si, avec une telle valeur de c_2, on cherchait un nouveau résultat relativement à k, ce qui nécessiterait le calcul des coefficients $h_2, h_4, \ldots$, on obtiendrait dans la plupart des cas une valeur effectivement plus approximative. Mais cela n'arrive pas nécessairement: quoique la formule (30) donne toujours une valeur de k plus petite que l'unité, la divergence des approximations successives peuvent montrer qu'on doit passer au second cas.

8. Considérons maintenant l'intégrale de l'équation (32').

En désignant par I ce que devient E lorsqu'on remplace k^2 par l^2, l'intégrale de l'équation dont il s'agit sera exprimée au moyen de la formule

$$(35) \quad V_1 = c_1 \operatorname{cn} \eta - c_2 \left\{ \operatorname{cn} \eta \left[\frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} - \frac{L - I - l^2 L}{L} \eta \right] - \operatorname{sn} \eta \operatorname{dn} \eta \right\}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{f_1 e_1 l'^2} \left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \operatorname{cn} \eta \int W \operatorname{cn} \eta \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta - \operatorname{cn} \eta \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} \int W \operatorname{cn} \eta \, d\eta \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{f_1 e_1 l'^2} \left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \operatorname{cn} \eta \int W \operatorname{sn} \eta \operatorname{dn} \eta \, d\eta - \operatorname{sn} \eta \operatorname{dn} \eta \int W \operatorname{cn} \eta \, d\eta \right\}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{L - I - l^2 L}{f_1 e_1 l'^2 L} \left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} \operatorname{cn} \eta \int d\eta \int W \operatorname{cn} \eta \, d\eta.$$

En effectuant les intégrations que demandent les divers termes de cette formule, on voit naître des termes séculaires dans deux intégrales différentes. Considérons-les séparément.

D'abord, on aura à l'aide des formules approximatives

$$\operatorname{cn}\eta \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} = 2q \sin w; \qquad W = \mathrm{w}_1 \sin w,$$

en ne retenant que le terme séculaire,

$$\int W \operatorname{cn}\eta \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta = q\, \mathrm{w}_1 \eta,$$

résultat, au lieu duquel on peut, en ayant égard à l'équation (25'), mettre celui-ci:

$$\frac{1}{16} l^2 \mathrm{w}_1 \eta = \frac{1}{16} \frac{3}{32} \frac{\beta\delta^2 \mathrm{w}_1}{\gamma e_1} \left\{ 1 - \frac{16}{3} \frac{\gamma(e_0 - e_1)}{\beta\delta^2} \right\} \eta.$$

L'autre terme à facteur séculaire provient de l'intégrale

$$\int W \operatorname{sn}\eta \operatorname{dn}\eta\, d\eta.$$

En n'y considérant que la partie principale du terme séculaire, admettons

$$\operatorname{sn}\eta \operatorname{dn}\eta = \sin w; \qquad W = \mathrm{w}_1 \sin w,$$

ce qui donne:

$$\int W \operatorname{sn}\eta \operatorname{dn}\eta\, d\eta = \frac{1}{2} \mathrm{w}_1 \eta.$$

Maintenant, pour déterminer la constante c_2, nous aurons la relation

$$\text{(36)} \qquad \frac{L - I - l^2 L}{L} c_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{f_1 e_1 l'^2} \left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16} l^2\right) \mathrm{w}_1,$$

d'où l'on conclut que la valeur c_2 ne devient assez petite que sous des conditions spéciales qui se produisent très rarement.

En effet, le coefficient de c_2 contenant le facteur l^2, il faut que le terme à droit divisé par l^2 soit une quantité très petite, même si l^2 disparaît.

Cela ne pouvant pas arriver à moins que le coefficient w_1 ne contienne lui-même le facteur l^2, examinons à cet égard brièvement la fonction

$$e^{2i\theta}\int e^{-2i\theta}Qdv - e^{-2i\theta}\int e^{2i\theta}Pdv$$

d'où découlent les termes en W.

Il est d'abord visible en inspectant, soit les équations (14), soit les équations (21), que la fonction dont il s'agit contient toujours le facteur $B_0\gamma$ divisé par une quantité très petite ce que nous avons rappelé, dans l'équation (28), en mettant en évidence le facteur $\frac{1}{l}\left(\frac{\gamma}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{3}}$. Mais puisque le coefficient de $\sin w$ contient le facteur A_1, il se trouve multiplié par l. Donc, la constante surabondante c_2 s'exprimant par la formule

$$c_2 = \frac{T}{l},$$

T étant une quantité qui ne disparaît pas avec l, la dite constante peut devenir très grande, de sorte que la fonction V_1 n'apparaisse plus comme une petite correction à ajouter à la fonction V_0. L'application des formules que nous venons d'exposer dans ce numéro paraît donc restreinte aux cas où l'arbitraire l est moindre que l'unité, mais en même temps non pas trop avoisinant zéro. Conclure de là que la méthode d'intégrer l'équation (28) dont nous avons fait usage, devient impraticable, ce serait néanmoins une conclusion prématurée. Car, en ajoutant, dans l'équation (27'), au coefficient $\frac{3}{8}\beta\gamma e_1$ une correction x, et en retranchant le terme $-x\sin V_0\cos V_0$ du membre droit de l'équation (29), on peut choisir l'indéterminée x de façon à faire disparaître, dans la fonction W, le terme dépendant de $\sin w$.

Cela étant, il est aisé de voir que le terme sémiséculaire provenant de la formule (35) est affecté du facteur q ou bien, ce qui revient au même, du facteur l^2. La méthode que nous venons d'exposer s'applique donc même au cas où l'arbitraire l est très petite.

§ 4. *Troisième méthode.*

1. Les procédés dont nous avons fait l'exposition dans les pages précédentes, reposent sur l'hypothèse qu'on soit autorisé à négliger, dans la première approximation, les deuxièmes dérivées des fonctions G et H. Nous avons fait voir, il est vrai, que cette hypothèse est légitime, vu qu'on aura, dans la seconde approximation, des termes tout connus, dépendant de la deuxième puissance des forces troublantes, tandis que le terme tout connu dans l'équation proposée était du premier ordre. Néanmoins, il nous sera utile d'obtenir l'intégrale de l'équation dont il s'agit sans omettre les secondes différentielles, problème qui sera l'objet des recherches que nous allons communiquer tout de suite. Mais en retenant les secondes différentielles, d'autres difficultés se présentent, principalement en ce que les diverses approximations ne seront plus indépendantes l'une de l'autre, de sorte qu'on ne pourra pas obtenir une certaine d'elles moyennant un calcul direct. En effet, chaque nouvelle approximation entraîne des changements plus ou moins graves dans les résultats déjà obtenus.

Dans les applications numériques, la méthode que nous envisageons maintenant, ne sera pas à préférer aux précédentes, tant que l'équation proposée ne contient qu'un seul terme tout connu. Mais elle jouit de l'avantage de s'appliquer, de la manière la plus directe, aux cas de plusieurs termes connus. Il me faut cependant remarquer d'abord que les approximations entamées dans les §§ 2 et 3 procèdent suivant les puissances des masses troublantes, tandis que celles que nous allons aborder maintenant procèdent ordinairement suivant les puissances d'une quantité du deuxième ordre par rapport aux excentricités, mais exceptionnellement suivant celles d'une quantité de l'ordre zéro.

Reprenons l'équation posée, à savoir:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho - \beta_3\rho^3 = -\gamma\cos(f - w) \tag{1}$$

et admettons:

$$\rho = \rho_0 + R.$$

Si maintenant ρ_0 était déterminé par l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2\rho_0}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho_0 - \beta_3\rho_0^3 = 0,$$

il nous resterait, pour déterminer la fonction R, l'équation

$$\frac{d^2R}{dv^2} + [1 - \beta_1 - 3\beta_3\rho_0^2]R = -\gamma\cos(f - w) + 3\beta_3 R^2\rho_0 + \beta_3 R^3.$$

Dans ces deux équations nous faisons entrer une petite modification. En désignant par $\Delta\beta_1$ et p deux constantes indéterminées, et en admettant la notation

$$\beta_1 + \Delta\beta_1 = \bar\beta,$$

nous les écrivons de la manière suivante:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\rho_0}{dv^2} + (1 - \bar\beta)\rho_0 - \beta_3\rho_0^3 = 0, \\ &\frac{d^2R}{dv^2} + (1 - \bar\beta + p - 3\beta_3\rho_0^2)R = -\gamma\cos(f - w) + 3\beta_3 R^2\rho_0 - \Delta\beta_1\rho_0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \beta_3 R^3 + (p - \Delta\beta_1)R. \end{aligned}\right.$$

Evidemment, la somme de ces deux équations n'étant autre chose que l'équation (1), on en conclut que la décomposition est légitime.

Les constantes indéterminées $\Delta\beta_1$ et p ont été introduites à fin d'éviter, dans les approximations suivantes, les arguments f et $f - w$.

2. La première des équations (2) s'intègre aisément au moyen de fonctions elliptiques. En effet, si l'on désigne par g^2 une arbitraire, on aura tout de suite:

$$\left(\frac{d\rho_0}{dv}\right)^2 = g^2 - (1 - \bar\beta)\rho_0^2 + \frac{1}{2}\beta_3\rho_0^4,$$

ou bien, en admettant les notations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{g^2}{\chi^2}(1 + k^2) = 1 - \bar\beta, \\ &\frac{g^2}{\chi^4}k^2 = \frac{1}{2}\beta_3, \end{aligned}\right.$$

l'équation

$$\left(\frac{d\rho_0}{dv}\right)^2 = g^2\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\varkappa^2}\right)\left(1 - k^2\frac{\rho_0^2}{\varkappa^2}\right). \tag{4}$$

Maintenant, si l'on pose:

$$\frac{g}{\varkappa}dv = du,$$

et qu'on désigne par u_0 une constante arbitraire, il résultera de l'équation précédente:

$$\rho_0 = \varkappa \operatorname{sn}(u - u_0), \quad \text{mod.}\, k. \tag{5}$$

Pour rendre ce résultat comparable à ceux que nous avons obtenus dans les paragraphes précédents, posons:

$$u = \frac{2K}{\pi}(1 - \varsigma)v,$$

$$u_0 = -K + \frac{2K}{\pi}\Gamma,$$

K étant l'intégrale complète de première espèce. De ces relations on conclut facilement les suivantes:

$$1 - \varsigma = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + k^2}}\,\frac{\pi}{2K}, \tag{6}$$

$$\rho_0 = \frac{\varkappa \operatorname{cn}\frac{2K}{\pi}[(1 - \varsigma)v - \Gamma]}{\operatorname{dn}\frac{2K}{\pi}[(1 - \varsigma)v - \Gamma]}. \tag{7}$$

Si β_3 était négatif, le module deviendrait imaginaire, et les formules correspondant au module réel s'obtiendraient tout de suite en vertu d'un théorème bien connu. Mais cherchons-les d'une manière immédiate.

En introduisant dans l'équation (4), après y avoir posé $-k^2$ au lieu de k^2,

$$\rho_0 = \varkappa \cos\varphi,$$

nous aurons:

$$\varkappa^2\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2 = g^2(1 + k^2\cos\varphi^2)$$

ou bien:

$$\frac{\varkappa^2}{g^2(1+k^2)}\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2 = 1 - \frac{k^2}{1+k^2}\sin\varphi^2.$$

En admettant les notations

$$\frac{k^2}{1+k^2} = l^2,$$

$$g\frac{\sqrt{1+k^2}}{\varkappa}dv = \frac{g}{\varkappa\sqrt{1-l^2}}dv$$
$$= d\mathrm{v},$$

on en tire:

$$\varphi = \mathrm{am}(\mathrm{v} - \mathrm{v}_0), \quad \mathrm{mod.}\, l,$$

v_0 étant une arbitraire que nous identifierons à $\frac{2L}{\pi}\Gamma$.

Finalement, si nous posons:

$$(8) \qquad 1 - \varsigma = \frac{g}{\varkappa}\sqrt{1+k^2}\frac{\pi}{2L}$$
$$= \sqrt{\frac{1-\bar\beta}{1-2l^2}}\frac{\pi}{2L},$$

notre résultat prendra la forme:

$$(9) \qquad \rho_0 = \varkappa\,\mathrm{cn}\frac{2L}{\pi}[(1-\varsigma)v - \Gamma].$$

3. Venons maintenant à l'intégration de la seconde des équations (2). En la multipliant par

$$\frac{\varkappa^2}{g^2} = \frac{1+k^2}{1-\bar\beta},$$

et en désignant par W la somme des termes du second membre, nous en concluons:

$$\frac{d^2R}{du^2} + \left\{1 + k^2 + \frac{p(1+k^2)}{1-\bar\beta} - 3\beta_3\frac{\varkappa^2}{g^2}\rho_0^2\right\}R = \frac{\varkappa^2}{g^2}W.$$

Mais, puisqu'on a

$$\beta_3\frac{\varkappa^2}{g^2} = 2\frac{k^2}{\varkappa^2},$$

l'équation précédente prend la forme

$$(10)\qquad \frac{d^2R}{du^2} - \{2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} u^2 - 1 - k^2 - 3\vartheta\}R = \frac{\varkappa^2}{g^2} W,$$

où l'on a écrit u au lieu de $u - u_0$, et employé la notation

$$3\vartheta = p \frac{1 + k^2}{1 - \beta}.$$

Dans le cas où β_3 prend une valeur négative, on multipliera la seconde des équations (2) par $\frac{\varkappa^2}{g^2(1 + k^2)}$, ce qui donne:

$$\frac{d^2R}{dv^2} + \left\{\frac{\varkappa^2(1 - \beta)}{g^2(1 + k^2)} + 3\chi - 3 \frac{\beta_3\varkappa^4}{g^2(1 + k^2)} \operatorname{cn} v^2\right\} R = \frac{\varkappa^2}{g^2(1 + k^2)} W,$$

où l'on a posé:

$$3\chi = \frac{\varkappa^2 p}{g^2(1 + k^2)} = \frac{\varkappa^2}{g^2} p(1 - l^2).$$

En mettant dans les équations (3) $-k^2$ au lieu de k^2 et en observant les relations

$$\frac{\varkappa^2(1 - \beta)}{g^2(1 + k^2)} - \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = 1 - 2l^2,$$

$$-\frac{3\beta_3\varkappa^4}{g^2(1 + k^2)} = 2 \cdot 3 \frac{k^2}{1 + k^2} = 2 \cdot 3l^2,$$

on conclut:

$$(11)\qquad \frac{d^2R}{dv^2} - \{2 \cdot 3l^2 \operatorname{sn} v^2 - 1 - 4l^2 - 3\chi\}R = \frac{1 - 2l^2}{1 - \beta} W.$$

Nous ne poursuivons plus les détails dans le cas où β_3 est négatif, vu qu'un tel cas ne se présente que très exceptionnellement parmi les problèmes de la mécanique céleste; le cas échéant, il serait facile d'obtenir, au moyen de transformations connues, les expressions correspondant à la valeur négative de β_3.

S'il s'agissait de trouver l'intégrale de l'équation (10), les termes du second membre étant tout connus, rien n'empêcherait d'appliquer les résultats que M. Hermite a donnés d'une manière admirablement élégante dans son mémoire *sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 106 et 107. Cependant, les termes du second membre n'étant pas donnés

dès l'abord, les difficultés qui nous restent à surmonter ne résident pas dans l'établissement de l'expression analytique de R comme fonction de u et W, mais bien dans le développement des termes de la fonction W elle-même. Cette fonction n'étant donnée, dans l'équation (10), qu'au moyen d'une expression contenant l'inconnue R, on ne saurait la déterminer d'une manière directe; il est donc indispensable de recourir aux approximations successives.

L'expression de la fonction W que nous empruntons à la seconde des équations (2), est celle-ci:

$$(12)\qquad W = -\gamma\cos(f-w) + 3\beta_3 R^2\rho_0 + \beta_3 R^3 - \Delta\beta_1\rho_0 + (p-\Delta\beta_1)R.$$

Pour y séparer, d'une manière aisée, les termes dont la somme doit disparaître, désignons généralement par

$$\overset{c(x)}{\mathrm{T}}(F)$$

le coefficient du terme qui se trouve multiplié par $\cos x$ dans le développement d'une fonction quelconque F, et par

$$\overset{s(x)}{\mathrm{T}}(F)$$

le coefficient du terme dépendant de $\sin x$. S'il n'y a pas d'ambiguité, nous omettons les caractéristiques c et s. Ainsi nous désignons par

$$\overset{0}{\mathrm{T}}(R^2)$$

le terme constant dans le développement de R^2, et par

$$\overset{f-w}{\mathrm{T}}(R^3)$$

le coefficient de $\cos(f-w)$ dans le développement de R^3.

Cela établi, si R contient le terme

$$\varkappa_1\cos(f-w),$$

nous aurons les conditions par lesquelles s'obtiennent p et $\Delta\beta_1$ exprimées au moyen des équations que voici:

$$3\beta_3 \overset{0}{\mathrm{T}}(R^2) - \Delta\beta_1 = 0,$$

$$\beta_3 \overset{f-w}{\mathrm{T}}(R^3) + (p - \Delta\beta_1)\varkappa_1 = 0,$$

d'où l'on tire:

$$\Delta\beta_1 = 3\beta_3 \overset{0}{\mathrm{T}}(R^2),$$

$$p = -\frac{1}{\varkappa_1}\beta_3 \overset{f-w}{\mathrm{T}}(R^3) + 3\beta_3 \overset{0}{\mathrm{T}}(R^2).$$

Si ensuite, dans la fonction R, on ne considère que le seul terme

$$\varkappa_1 \cos(f - w),$$

il en résulte:

$$\overset{f-w}{\mathrm{T}}(R^3) = \frac{3}{4}\varkappa_1^3,$$

$$\overset{0}{\mathrm{T}}(R^2) = \frac{1}{2}\varkappa_1^2,$$

d'où s'obtient:

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta\beta_1 &= \frac{3}{2}\beta_3\varkappa_1^2, \\ p &= \frac{3}{4}\beta_3\varkappa_1^2. \end{aligned} \right.$$

Ayant obtenu ces résultats, nous poserons:

$$R = \rho_1 + R_1,$$

$$W = -\gamma\cos(f - w) + W_1,$$

et nous déterminerons la fonction ρ_1 à l'aide de l'équation (10), après y avoir remplacé W par $-\gamma\cos(f - w)$, ou bien au moyen de la seconde des équations (2), en n'y retenant, au second membre, que cette partie de W. Ainsi nous aurons:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\rho_1}{dv^2} + (1 - \bar{\beta} + p - 3\beta_3\rho_0^2)\rho_1 = -\gamma\cos(f - w), \\ &\frac{d^2R_1}{dv^2} + (1 - \bar{\beta} + p - 3\beta_3\rho_0^2)R_1 = W_1, \end{aligned} \right.$$

où la fonction W_1 est donnée par l'expression suivante:

$$(15)\qquad W_1 = 3\beta_3\rho_1^2\rho_0 + \beta_3\rho_1^3 - \Delta\beta_1\rho_0 + (p - \Delta\beta_1)(\rho_1 + R_1)$$
$$+ 2\,.\,3\beta_3\rho_0\rho_1 R_1 + 3\beta_3 R_1^2\rho_0 + 3\beta_3\rho_1^2 R_1 + 3\beta_3\rho_1 R_1^2 + \beta_3 R_1^3$$

4. Avant d'établir, avec plus de détails, l'expression de la fonction W_1, arrêtons-nous à l'intégration de la première des équations (14) ou bien à celle de l'équation (10). En nous rappelant la forme de l'équation de Lamé adoptée par M. Hermite, à savoir:

$$\frac{d^2R}{du^2} - [2\,.\,3k^2 \operatorname{sn} u^2 + 2\,.\,3k^2 \operatorname{sn} a^2 - 4 - 4k^2]R = 0,$$

nous aurons, par comparaison avec l'équation (10),

$$6k^2 \operatorname{sn} a^2 - 4 - 4k^2 = -1 - k^2 - 3\vartheta.$$

On tire de là:

$$2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1 - k^2 = -\vartheta,$$
$$2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1 = k^2 - \vartheta,$$
$$2 \operatorname{sn} a^2 - 1 = \frac{1 - \vartheta}{k^2}.$$

Effectuons le calcul d'après les trois formules de M. Hermite, à savoir:

$$\operatorname{sn} \omega^2 = \frac{\operatorname{sn} a^4(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1 - k^2)}{3k^2 \operatorname{sn} a^4 - 2(1 + k^2)\operatorname{sn} a^2 + 1},$$

$$\operatorname{cn} \omega^2 = -\frac{\operatorname{cn} a^4(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1)}{3k^2 \operatorname{sn} a^4 - 2(1 + k^2)\operatorname{sn} a^2 + 1},$$

$$\operatorname{dn} \omega^2 = -\frac{\operatorname{dn} a^4(2 \operatorname{sn} a^2 - 1)}{3k^2 \operatorname{sn} a^4 - 2(1 + k^2)\operatorname{sn} a^2 + 1}.$$

Nous aurons d'abord:

$$\operatorname{sn} a^2 = \frac{1 + k^2 - \vartheta}{2k^2};\qquad \operatorname{cn} a^2 = -\frac{1 - k^2 - \vartheta}{2k^2};\qquad \operatorname{dn} a^2 = \frac{1 - k^2 + \vartheta}{2},$$

et ensuite:

$$3k^2 \operatorname{sn} a^4 - 2(1 + k^2) \operatorname{sn} a^2 + 1 = (2 \operatorname{sn} a^2 - 1)(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1) - k^2 \operatorname{sn} a^4$$

$$= (2 \operatorname{sn} a^2 - 1)(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1) - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sn} a^2 (2 \operatorname{sn} a^2 - 1 + 1)$$

$$= \frac{(1 - \vartheta)(k^2 - \vartheta)}{k^2} - \frac{(1 + k^2 - \vartheta)^2}{4k^2}.$$

Après avoir admis la notation:

$$\lambda^2 = \frac{(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1 - k^2)(2k^2 \operatorname{sn} a^2 - 1)(2 \operatorname{sn} a^2 - 1)}{3k^2 \operatorname{sn} a^4 - 2(1 + k^2) \operatorname{sn} a^2 + 1},$$

M. Hermite est parvenu à l'expression suivante de l'intégrale de l'équation de Lamé:

$$R = CD_u \left\{ \frac{H(u + \omega)}{\Theta(u)} e^{\left(\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)u} \right\} + C' D_u \left\{ \frac{H(u - \omega)}{\Theta(u)} e^{-\left(\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)u} \right\}.$$

Maintenant, pour rendre les formules que nous allons déduire plus nettes, nous admettrons quelques simplifications, qui, d'ailleurs, ne touchent pas sensiblement à l'exactitude des résultats, non plus à leur portée. Donc, en nous rappelant que la quantité ϑ est très petite, et comparable à k^2 quant à sa grandeur, nous l'omettons à côté de l'unité.

Avec ces simplifications, les formules précédentes nous donnent les valeurs que voici:

$$\operatorname{sn} \omega^2 = \frac{\vartheta}{k^2}; \qquad \operatorname{cn} \omega^2 = \frac{k^2 - \vartheta}{k^2}; \qquad \operatorname{dn} \omega^2 = 1,$$

$$\lambda^2 = 4\vartheta(k^2 - \vartheta).$$

Considérons toujours k^2, ainsi que ϑ comme des quantités très petites, et posons:

$$\nu = \lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)},$$

il sera permis de mettre:

$$\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{1}{2} k^2 \sin \omega \cos \omega$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\vartheta(k^2 - \vartheta)},$$

d'où l'on conclut:

$$\nu = \frac{3}{2}\sqrt{\vartheta(k^2 - \vartheta)}.$$

Maintenant, si nous désignons par y_1 et y_2 les intégrales particulières de l'équation de Lamé, de sorte que:

$$y_1 = D_u \frac{H(u + \omega)}{\Theta(u)} e^{\nu u}; \qquad y_2 = D_u \frac{H(u - \omega)}{\Theta(u)} e^{-\nu u}.$$

et que nous admettions les notations suivantes:

$$a = \cos\omega = \frac{\sqrt{k^2 - \vartheta}}{k}; \qquad b = \sin\omega = \frac{\sqrt{\vartheta}}{k},$$

nous aurons, en négligeant toujours les termes du premier ordre à côté de ceux de l'ordre zéro,

$$y_1 = (a\cos u - b\sin u)e^{\nu u},$$

$$y_2 = (a\cos u + b\sin u)e^{-\nu u}.$$

Partant de ces expressions, on déduit aisément la valeur que voici:

$$y_2 y_1' - y_1 y_2' = -2ab = -\sin 2\omega.$$

Si maintenant on met, dans l'équation (10), W au lieu de $\frac{\varkappa^2}{g^2}W$, l'expression de R devient, vu que le facteur $\frac{\varkappa^2}{g^2}$ est à peu près égal à l'unité:

$$(16) \qquad R = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$+ \frac{a\cos u + b\sin u}{2ab} e^{-\nu u} \int (a\cos u - b\sin u) W e^{\nu u} du$$
$$- \frac{a\cos u - b\sin u}{2ab} e^{\nu u} \int (a\cos u + b\sin u) W e^{-\nu u} du,$$

c_1 et c_2 étant les deux constantes d'intégration.

Ayant ainsi trouvé la formule générale donnant l'intégrale de l'équation (10), nous allons en faire l'application à un cas spécial. Or,

nous supposons, en ne considérant qu'un terme isolé dans l'expression de W:

$$W = \gamma_n \cos(f - nw) = \gamma_n \sin(u - nw),$$

n étant un entier positif ou négatif.

En formant les produits de la fonction W par $\cos u$ et $\sin u$, nous omettons les termes dont les valeurs ne s'agrandissent pas par l'intégration, et nous aurons:

$$W \cos u = -\frac{1}{2}\gamma_n \sin nw,$$

$$W \sin u = \quad \frac{1}{2}\gamma_n \cos nw.$$

Maintenant, si nous nous rappelons les formules

$$\int \sin nw e^{\nu u} du = \frac{-n(\sigma - \varsigma)\cos nw + \nu \sin nw}{n^2(\sigma - \varsigma)^2 + \nu^2} e^{\nu u},$$

$$\int \cos nw e^{\nu u} du = \frac{n(\sigma - \varsigma)\sin nw + \nu \cos nw}{n^2(\sigma - \varsigma)^2 + \nu^2} e^{\nu u},$$

et que nous désignions par ρ_n ce que devient R dans l'hypothèse actuelle, notre résultat sera:

$$(17) \qquad \rho_n = \frac{\frac{1}{2}\gamma_n n(\sigma - \varsigma)}{n^2(\sigma - \varsigma)^2 + \nu^2}\cos(f - nw) + \frac{a^2 - b^2}{2ab}\,\frac{\frac{1}{2}\gamma_n \nu}{n^2(\sigma - \varsigma)^2 + \nu^2}\cos(f - nw)$$

$$- \frac{a^2 + b^2}{2ab}\cdot\frac{\frac{1}{2}\gamma_n \nu}{n^2(\sigma - \varsigma)^2 + \nu^2}\cos(f + nw),$$

où l'on a supprimé les deux termes dépendant des arbitraires.

Il faut remarquer que la formule obtenue donne toujours à ρ_n une valeur réelle, même si ν est imaginaire. En effet, les quantités ν et a devenant imaginaires simultanément, les facteurs imaginaires se détruisent, l'un l'autre. Mais le résultat que nous venons d'obtenir est remarquable à un autre point de vue, car on en tire le fait important que la valeur de ρ_n s'approche de son premier terme, ou bien de:

$$\frac{\gamma_n}{2n(\sigma - \varsigma)}\cos(f - nw),$$

à mesure que l'entier n acquiert de grandes valeurs, ce qui montre la convergence de la série

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots,$$

à condition que la série

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots$$

soit convergente, ou même que cette série ait la forme

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots,$$

les a étant des quantités non croissantes.

5. Le résultat approximatif que nous avons signalé par la formule (17), s'obtient aussi d'une manière tout à fait simple, comme nous allons montrer. Dans ce but, introduisons dans l'équation

$$\frac{d^2\rho_n}{dv^2} + (1 - \bar{\beta} + p - 3\beta_3\rho_0^2)\rho_n = \gamma_n \cos(f - nw)$$

la valeur

$$\rho_0 = \varkappa \cos f;$$

il en résulte:

$$\frac{d^2\rho_n}{dv^2} + \left(1 - \bar{\beta} + p - \frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2 - \frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2 \cos 2f\right)\rho_n = \gamma_n \cos(f - nw).$$

Or, si nous supposons:

$$\rho_n = \varkappa_n \cos(f - nw) + \lambda_n \cos(f + nw),$$

nous aurons, au moyen de l'équation en ρ_n et en négligeant les termes dépendant de l'argument $3f \pm nw$, les deux conditions que voici:

$$\left\{- [1 - \varsigma - n(\sigma - \varsigma)]^2 + 1 - \bar{\beta} + p - \frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2\right\}\varkappa_n - \frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\lambda_n = \gamma_n,$$

$$\left\{- [1 - \varsigma + n(\sigma - \varsigma)]^2 + 1 - \bar{\beta} + p - \frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2\right\}\lambda_n - \frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\varkappa_n = 0.$$

Pour simplifier les relations obtenues, rappelons-nous l'expression

$$(1 - \varsigma)^2 = 1 - \bar{\beta} - \frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2,$$

qui découle de la formule (6), en y négligeant les termes du deuxième ordre par rapport à β_1.

Cela posé, et si nous omettons les termes du deuxième ordre par rapport à ς et à σ, les équations précédentes prennent la forme:

$$\left\{2n(\sigma-\varsigma)+p-\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\right\}\varkappa_n-\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\lambda_n=\gamma_n,$$

$$\left\{-2n(\sigma-\varsigma)+p-\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\right\}\lambda_n-\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\varkappa_n=0.$$

En multipliant la première de ces équations par $2n(\sigma-\varsigma)-p+\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2$, et la seconde par $-\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2$, la somme des deux produits nous donne:

$$\left\{[2n(\sigma-\varsigma)]^2-\left(p-\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\right)^2\right\}\varkappa_n+\left(\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\right)^2\varkappa_n$$
$$=\gamma_n\left\{2n(\sigma-\varsigma)-p+\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\right\},$$

ou bien:

$$\left\{[2n(\sigma-\varsigma)]^2+p\left(\frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2-p\right)\right\}\varkappa_n=\gamma_n\left(2n(\sigma-\varsigma)-p+\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\right).$$

De la même manière, on obtiendra aussi l'équation suivante:

$$\left\{[2n(\sigma-\varsigma)]^2+p\left(\frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2-p\right)\right\}\lambda_n=-\frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2\gamma_n.$$

Pour rapprocher ces résultats de celui que nous avons donné dans l'équation (17), il suffit de se rappeler les relations

$$\nu^2=\frac{1}{4}p\left(\frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2-p\right);\qquad k^2=\frac{1}{2}\beta_3\varkappa^2;$$

$$\frac{\nu}{2ab}=\frac{3}{4}k^2;\qquad a^2+b^2=1;\qquad a^2-b^2=1-\frac{2}{3}\frac{p}{k^2}.$$

6. Le coefficient ν disparaît dans deux cas différents: premièrement si ϑ s'évanouit; puis, si l'égalité

$$\vartheta=k^2$$

a lieu. Examinons en particulier les conséquences de ces deux hypothèses, en commençant par la première.

Donc, en faisant, dans l'équation (10),

$$\vartheta = 0; \qquad \frac{\varkappa^2}{g^2} = 1,$$

nous aurons:

$$\frac{d^2R}{du^2} - [2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} u^2 - 1 - k^2]R = W. \tag{18}$$

En désignant par c_1 et c_2 les deux arbitraires introduites par l'intégration, la fonction R sera exprimée au moyen de la formule suivante:

$$\begin{aligned}(19)\quad R &= c_1 \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\ &+ c_2\left\{\frac{\operatorname{sn} u}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4}\frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + \frac{(1-k^2)K-(1+k^2)E}{k'^4K} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u\right\} \\ &- \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \int W\left[\frac{\operatorname{sn} u}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4}\frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u\right]du \\ &+ \left[\frac{\operatorname{sn} u}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4}\frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u\right]\int W \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u\, du \\ &+ \frac{(1-k^2)K-(1+k^2)E}{k'^4K}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \int du \int W \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u\, du.\end{aligned}$$

Si nous supposons le module tellement petit qu'on puisse le négliger auprès de l'unité, et que nous omettions les termes dépendant des constantes arbitraires, la formule précédente prend la forme:

$$\begin{aligned}R &= -\cos u \int W \sin u\, du + \sin u \int W \cos u\, du \\ &\quad - \frac{3}{2}k^2 \cos u \int du \int W \cos u\, du,\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en supposant pour W la valeur

$$W = \gamma_n \sin(u - nw),$$

le résultat suivant:

$$\rho_n = \frac{1}{2}\frac{\gamma_n}{n(\sigma - \varsigma)}\sin(u - nw) - \frac{3}{4}\frac{\gamma_n k^2}{n^2(\sigma - \varsigma)^2}\cos u \sin nw$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{\gamma_n}{n(\sigma - \varsigma)} + \frac{3}{8}\frac{\gamma_n k^2}{n^2(\sigma - \varsigma)^2}\right\}\cos(f - nw) - \frac{3}{8}\frac{\gamma_n k^2}{n^2(\sigma - \varsigma)^2}\cos(f + nw),$$

ce qui est parfaitement d'accord avec ce qu'on déduit de l'équation (17), en y mettant

$$b = \nu = 0; \qquad \frac{\nu}{2ab} = \frac{3}{4}k^2.$$

Admettons encore que l'angle w soit égal à une constante, supposition qui correspond à l'hypothèse

$$\sigma = \varsigma,$$

et cherchons ce qui en résultera.

On aura d'abord:

$$\rho_n = -\frac{1}{2}\gamma_n \cos u \cos nw \,.\, u - \frac{1}{2}\gamma_n \sin u \sin nw \,.\, u$$

$$+ \frac{3}{8}\gamma_n k^2 \cos u \sin nw \,.\, u^2 + \text{termes périodiques};$$

mais un tel résultat ne pouvant pas généralement se concilier avec la solution absolue de l'équation proposée, à savoir:

$$\frac{d^2\rho_n}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho_n - \beta_3\rho_n^3 = \gamma_n \cos(f - nw),$$

l'hypothèse doit être rejetée. Seulement dans le cas où l'angle w a la valeur constante zéro, l'égalité entre σ et ς peut être admissible. Mais la solution en résultant n'est qu'une intégrale particulière, vu que la constante introduite par l'intégration doit satisfaire à une équation de condition. Et justement puisque le coefficient σ est indéterminé, l'intégrale ne contiendra qu'une seule constante arbitraire.

Supposons maintenant que ϑ soit égal à k^2; alors nous aurons de l'équation (10) la suivante:

$$\frac{d^2R}{du^2} - [2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} u^2 - 1 - 4k^2]R = W, \tag{20}$$

dont l'intégrale générale s'exprime au moyen de la formule:

$$\begin{aligned}
(21)\quad R &= c_1 \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \\
&+ c_2\left\{-\operatorname{cn} u - \frac{k'^2 - k^2}{k'^2}\frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u + \frac{k'^2K - (k'^2 - k^2)E}{k'^2K} u \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u\right\} \\
&+ \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \int W\left\{\operatorname{cn} u + \frac{k'^2 - k^2}{k'^2}\frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u\right\} du \\
&- \left\{\operatorname{cn} u + \frac{k'^2 - k^2}{k'^2}\frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u\right\}\int W \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u\, du \\
&+ \frac{k'^2K - (k'^2 - k^2)E}{k'^2K}\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \int du \int W \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u\, du.
\end{aligned}$$

En ne retenant que les termes les plus importants, cette formule se change en celle-ci:

$$\begin{aligned}
R = \sin u \int W \cos u\, du - \cos u \int W \sin u\, du \\
+ \frac{3}{2}k^2 \sin u \int du \int W \sin u\, du.
\end{aligned}$$

Après avoir fait:

$$W = \gamma_n \sin(u - nw),$$

on en tire

$$\rho_n = \frac{1}{2}\frac{\gamma_n}{n(\sigma - \varsigma)}\sin(u - nw) - \frac{3}{4}\frac{k^2\gamma_n}{n^2(\sigma - \varsigma)^2}\sin u \cos nw.$$

En faisant, dans la formule (17)

$$a = \nu = 0; \qquad \frac{\nu}{2ab} = \frac{3}{4}k^2,$$

on retrouvera le résultat obtenu tout à l'heure.

Par ces recherches nous avons appris que la formule (17) n'offre aucune discontinuité dans les cas que nous venons d'examiner.

7. Passons maintenant à la formation de l'expression de la fonction W_1 donnée par l'équation (15). Le résultat demandé s'exprimant par la formule

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
W_1 = & & &+ \delta_1 \cos(f + w) \\
& + \gamma_2 \cos(f - 2w) & &+ \delta_2 \cos(f + 2w) \\
& + \gamma_3 \cos(f - 3w) & &+ \delta_3 \cos(f + 3w) \\
& + \ldots & &+ \ldots,
\end{aligned}
$$

où les termes qui dépendent des arguments $3f \pm nw$; $5f \pm nw$; ... sont toujours supprimés, il s'agit de déterminer les coefficients γ_n et δ_n, ou du moins de les examiner par rapport à leur convergence.

Dans ce but, nous allons d'abord établir quelques formules générales.

Soient γ_n et δ_n deux coefficients connus, on calculera d'après les formules que nous venons de déduire, la partie correspondante de R, partie que nous désignerons par

$$
(23)\qquad \rho_n = \varkappa_n \cos(f - nw) + \lambda_n \cos(f + nw).
$$

D'autre part, si les $\varkappa_n$ et λ_n étaient donnés, on obtiendrait les γ_n et les δ_n en introduisant, dans l'équation (15), les valeurs

$$
\begin{aligned}
\rho_0 &= \varkappa \cos f, \\
\rho_1 &= \varkappa_1 \cos(f - w) + \lambda_1 \cos(f + w),
\end{aligned}
$$

ainsi que toute la série

$$
R_1 = \rho_2 + \rho_3 + \ldots.
$$

Certes, du terme $\delta_1 \cos(f + w)$ proviennent dans R_1 deux termes dépendant des arguments $w - f$ et $w + f$, mais on peut les réunir aux termes correspondants de la fonction ρ_1, de sorte qu'on peut se figurer la fonction R_1 dépourvue de ces arguments.

En introduisant l'expression donnant R_1 dans l'équation (15), on se rappellera les formules

$$\text{(I)} \qquad R_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 + \cdots$$
$$+ 2\rho_2\rho_3 + 2\rho_2\rho_4 + \cdots$$
$$+ 2\rho_3\rho_4 + \cdots$$
$$+ \cdots,$$

$$\text{(II)} \qquad R_1^3 = \rho_2^3 + \rho_3^3 + \cdots$$
$$+ 3\rho_2(\rho_3^2 + \rho_4^2 + \cdots)$$
$$+ 3\rho_3(\rho_2^2 + \rho_4^2 + \cdots)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 6\rho_2\rho_3\rho_4 + 6\rho_2\rho_3\rho_5 + 6\rho_2\rho_3\rho_6 + \cdots$$
$$+ 6\rho_2\rho_4\rho_5 + 6\rho_2\rho_4\rho_6 + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 6\rho_3\rho_4\rho_5 + 6\rho_3\rho_4\rho_6 + 6\rho_3\rho_4\rho_7 + \cdots$$
$$+ 6\rho_3\rho_5\rho_6 + 6\rho_3\rho_5\rho_7 + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Puis, en désignant par n et n' deux entiers, on aura:

$$\text{(III)} \quad \rho_n\rho_{n'} = \frac{1}{2}(\varkappa_n\varkappa_{n'} + \lambda_n\lambda_{n'})\cos(n - n')w + \frac{1}{2}(\varkappa_n\lambda_{n'} + \varkappa_{n'}\lambda_n)\cos(n + n')w$$
$$+ \frac{1}{2}\varkappa_n\varkappa_{n'}\cos[2f - (n + n')w] + \frac{1}{2}\lambda_n\lambda_{n'}\cos[2f + (n + n')w]$$
$$+ \frac{1}{2}\varkappa_n\lambda_{n'}\cos[2f - (n - n')w] + \frac{1}{2}\varkappa_{n'}\lambda_n\cos[2f + (n - n')w].$$

Faisant $n = n'$, la formule précédente se change en celle-ci:

$$\text{(IV)} \qquad \rho_n^2 = \frac{1}{2}(\varkappa_n^2 + \lambda_n^2) + \varkappa_n\lambda_n\cos 2nw$$
$$+ \frac{1}{2}\varkappa_n^2\cos(2f - 2nw) + \frac{1}{2}\lambda_n^2\cos(2f + 2nw)$$
$$+ \varkappa_n\lambda_n\cos 2f.$$

En multipliant la formule (III) par

$$\rho_{n''} = \varkappa_{n''} \cos(f - n''w) + \lambda_{n''} \cos(f + n''w),$$

n'' étant un autre entier, il en résulte:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{V}) \quad \rho_n \rho_{n'} \rho_{n''} = \; & \frac{1}{4}\{\varkappa_{n''}(\varkappa_n \lambda_{n'} + \varkappa_{n'} \lambda_n) + \varkappa_n \varkappa_{n'} \lambda_{n''}\} \cos[f - (n + n' + n'')w] \\
& + \frac{1}{4}\{\varkappa_{n''}(\varkappa_n \varkappa_{n'} + \lambda_n \lambda_{n'}) + \lambda_n \varkappa_{n'} \lambda_{n''}\} \cos[f - (-n + n' + n'')w] \\
& + \frac{1}{4}\{\varkappa_{n''}(\varkappa_n \varkappa_{n'} + \lambda_n \lambda_{n'}) + \varkappa_n \lambda_{n'} \lambda_{n''}\} \cos[f - (n - n' + n'')w] \\
& + \frac{1}{4}\{\lambda_{n''}(\varkappa_n \lambda_{n'} + \varkappa_{n'} \lambda_n) + \varkappa_n \varkappa_{n'} \varkappa_{n''}\} \cos[f - (n + n' - n'')w] \\
& + \frac{1}{4}\{\varkappa_{n''}(\varkappa_n \lambda_{n'} + \varkappa_{n'} \lambda_n) + \lambda_n \lambda_{n'} \lambda_{n''}\} \cos[f + (n + n' - n'')w] \\
& + \frac{1}{4}\{\lambda_{n''}(\varkappa_n \varkappa_{n'} + \lambda_n \lambda_{n'}) + \lambda_n \varkappa_{n'} \varkappa_{n''}\} \cos[f + (n - n' + n'')w] \\
& + \frac{1}{4}\{\lambda_{n''}(\varkappa_n \varkappa_{n'} + \lambda_n \lambda_{n'}) + \varkappa_n \lambda_{n'} \varkappa_{n''}\} \cos[f + (-n + n' + n'')w] \\
& + \frac{1}{4}\{\lambda_{n''}(\varkappa_n \lambda_{n'} + \varkappa_{n'} \lambda_n) + \lambda_n \lambda_{n'} \varkappa_{n''}\} \cos[f + (n + n' + n'')w].
\end{aligned}
$$

On tire de là, si n est égal à n'':

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{VI}) \quad \rho_n^2 \rho_{n'} = \; & \frac{1}{2}[\varkappa_{n'}(\varkappa_n^2 + \lambda_n^2) + \lambda_{n'} \varkappa_n \lambda_n] \cos(f - n'w) \\
& + \frac{1}{4}(2\lambda_{n'} \varkappa_n \lambda_n + \varkappa_{n'} \varkappa_n^2) \cos[f - (2n - n')w] \\
& + \frac{1}{4}(2\varkappa_n \varkappa_{n'} \lambda_n + \lambda_{n'} \varkappa_n^2) \cos[f - (2n + n')w] \\
& + \frac{1}{4}(2\varkappa_n \lambda_n \lambda_{n'} + \varkappa_{n'} \lambda_n^2) \cos[f + (2n + n')w] \\
& + \frac{1}{4}(2\varkappa_{n'} \varkappa_n \lambda_n + \lambda_{n'} \lambda_n^2) \cos[f + (2n - n')w] \\
& + \frac{1}{2}[\lambda_{n'}(\varkappa_n^2 + \lambda_n^2) + \varkappa_{n'} \varkappa_n \lambda_n] \cos(f + n'w).
\end{aligned}
$$

Enfin, si l'on admet l'égalité entre les trois entiers n, n' et n'', on aura la formule

$$\text{(VII)} \qquad \begin{aligned} \rho_n^3 = & \left(\frac{3}{4}\varkappa_n^3 + \frac{3}{2}\varkappa_n\lambda_n^2\right)\cos(f - nw) \\ & + \frac{3}{4}\lambda_n\varkappa_n^2\cos(f - 3nw) \\ & + \frac{3}{4}\varkappa_n\lambda_n^2\cos(f + 3nw) \\ & + \left(\frac{3}{4}\lambda_n^3 + \frac{3}{2}\lambda_n\varkappa_n^2\right)\cos(f + nw). \end{aligned}$$

Dans ces formules on a supprimé les termes dépendant de $3f \pm nw$, de $5f \pm nw$, etc., vu qu'ils ne peuvent produire aucune altération sensible dans les résultats.

Après ces préparations, revenons à l'examen de la nature des coefficients du développement (22).

8. Dans les cas les plus fréquents, le coefficient ν est tellement petit qu'il peut être négligé par rapport à $\sigma - \varsigma = \bar{\varsigma}$; surtout si ν^2 est positif, l'erreur commise par la simplification dont nous avons parlé, serait de peu d'importance dans les résultats suivants.

Cela posé, nous aurons par l'intégration de la première des équations (14), en faisant usage de la formule (17), le résultat approximatif que voici:

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\bar{\varsigma}}.$$

Puisque $\bar{\varsigma}$ contient le carré du coefficient $\varkappa_1$, nous avons, pour le déterminer, une équation du troisième degré, dans laquelle nous supposons γ tellement petit que $\varkappa_1$ devient une quantité du même ordre que $\varkappa$. Pour mettre cette supposition en évidence, posons:

$$\gamma = \beta_3\varepsilon^3,$$

ε étant une quantité de l'ordre de $\varkappa$.

En regardant l'expression (15), on voit facilement que la partie principale du terme

$$\gamma_2\cos(f - 2w)$$

provient du produit $3\beta_3\rho_1^2\rho_0$, et que la valeur du coefficient γ_2, relativement à la partie considérée, est donnée par la formule

$$\gamma_2 = \frac{3}{16}\frac{\beta_3 \varkappa \gamma^2}{\bar{\varsigma}^2} = \frac{3}{16}\frac{\beta_3^3 \varkappa \varepsilon^6}{\bar{\varsigma}^2}.$$

Partant de la formule (17), on obtiendra par l'intégration:

$$\varkappa_2 = \frac{3}{64}\frac{\beta_3^3 \varkappa \varepsilon^6}{\bar{\varsigma}^3}.$$

Ayant ainsi déterminé, approximativement, la fonction ρ_2, du moins quant à son terme principal, on aura la partie la plus importante du coefficient γ_3 en développant le produit $2 \cdot 3\beta_3\rho_0\rho_1\rho_2$. Il en résulte, ce qui est facile à voir, en regardant la formule (V), la valeur

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= \frac{3}{2}\beta_3 \varkappa \varkappa_1 \varkappa_2 \\ &= -\frac{9}{256}\frac{\beta_3^5 \varkappa^2 \varepsilon^9}{\bar{\varsigma}^4},\end{aligned}$$

d'où l'on tire, toujours en vertu de la formule (17),

$$\varkappa_3 = -\frac{3}{512}\frac{\beta_3^5 \varkappa^2 \varepsilon^9}{\bar{\varsigma}^5}.$$

En continuant ces opérations, on trouvera toujours des coefficients numériques tellement décroissants que non seulement la convergence de la série

$$\varkappa + \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots$$

paraîtra mise hors de doute, mais aussi que la méthode que nous venons de développer, se présentera bien propre aux applications numériques. Certes, nous avons omis les termes provenant des coefficients δ_n, ce qui n'était nullement nécessaire, mais il m'a paru préférable de ne pas trop charger cette exposition de formules d'une application extrêmement rare.

Par les expressions que nous venons d'obtenir, on a mis en pleine lumière le fait important que, même si le diviseur $\bar{\varsigma}$ était de l'ordre du produit $\beta_3\varkappa^2$, la série obtenue serait pourtant convergente, bien que tous les coefficients fussent du premier ordre par rapport aux excentricités ou aux inclinaisons, et de l'ordre zéro par rapport aux masses troublantes.

9. Examinons encore le cas où l'on suppose la constante arbitraire très petite par rapport au coefficient $\varkappa_1$. Dans ce but, reprenons l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho - \beta_3\rho^3 = -\gamma\cos(f - w),$$

et décomposons-la dans les deux suivantes:

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\rho_1}{dv^2} + (1 - \beta_1 + h)\rho_1 - \beta_3\rho_1^3 = 0, \\ &\frac{d^2\rho_0}{dv^2} + (1 - \beta_1 - 3\beta_3\rho_1^2)\rho_0 = -\gamma\cos(f - w) + h\rho_1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 3\beta_3\rho_1\rho_0^2 + \beta_3\rho_0^3. \end{aligned}\right.$$

En intégrant la première d'elles, nous aurons:

$$\left(\frac{d\rho_1}{dv}\right)^2 = g^2 - (1 - \beta_1 + h)\rho_1^2 + \frac{1}{2}\beta_3\rho_1^4,$$

g^2 étant la constante d'intégration.

Maintenant, si nous posons, comme dans le n° 2:

$$\frac{g^2}{\varkappa_1^2}(1 + k^2) = 1 - \beta_1 + h,$$

$$\frac{g^2}{\varkappa_1^4}k^2 = \frac{1}{2}\beta_3,$$

$$g dv = \varkappa_1 dx,$$

il viendra:

$$\frac{1}{\varkappa_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 = 1 - (1 + k^2)\frac{\rho_1^2}{\varkappa_1^2} + k^2\frac{\rho_1^4}{\varkappa_1^4},$$

d'où l'on tire:

$$\rho_1 = \varkappa_1 \operatorname{sn} x,$$

la constante introduite par la seconde intégration étant comprise dans l'argument x.

Or, il s'agit de déterminer la constante g, qui, dans le cas présent, n'est plus arbitraire, mais bien surabondante. A cet égard, observons

que la période de la fonction ρ_1 doit être celle de $\cos(f - w)$; il en résulte la condition

$$1 - \sigma = \frac{g}{\varkappa_1}\frac{\pi}{2K} = \frac{\pi}{2K}\sqrt{\frac{1 - \beta_1 + h}{1 + k^2}},$$

d'où s'obtient le module k.

De la seconde des équations (24) on tire la valeur suffisamment approchée:

$$h = \frac{\gamma}{\varkappa_1} - \frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2, \tag{25}$$

$\varkappa$ étant une constante introduite par l'intégration de la dite équation. De là il résulte:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2(1 + k^2) = \frac{1 - \beta_1 + \frac{\gamma}{\varkappa_1} - \frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2}{(1 - \sigma)^2}.$$

En ne retenant que les premières puissances de k^2 et de σ, l'équation précédente se transforme en celle-ci:

$$\frac{3}{2}k^2 = 2\sigma - \beta_1 + \frac{\gamma}{\varkappa_1} - \frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2,$$

ou bien, si l'on admet l'expression approximative

$$k^2 = \frac{1}{2}\beta_3\varkappa_1^2,$$

en la suivante:

$$\frac{3}{4}\beta_3\varkappa_1^2 - 2\sigma + \beta_1 + \frac{3}{2}\beta_3\varkappa^2 = \frac{\gamma}{\varkappa_1}. \tag{26}$$

Voilà l'équation connue du troisième degré qui sert à déterminer le coefficient $\varkappa_1$.

Après avoir introduit, dans la seconde des équations (24), la variable x au lieu de v, elle s'écrit ainsi:

$$\frac{g^2}{\varkappa_1^2}\frac{d^2\rho_0}{dx^2} + \left\{\frac{g^2}{\varkappa_1^2}(1 + k^2) - h - p - 2 \,.\, 3k^2\frac{g^2}{\varkappa_1^4}\rho_1^2\right\}\rho_0$$
$$= -\gamma\cos(f - w) + h\rho_1 + \beta_3\rho_0^3 - p\rho_0 + 3\beta_3\rho_0^2\rho_1,$$

où p est une constante encore à notre disposition.

Admettons la notation

$$3\vartheta = -(h + p)\frac{\varkappa_1^2}{g^2}$$

et négligeons, dans le second membre, le facteur $\frac{\varkappa_1^2}{g^2}$ qui est sensiblement égal à l'unité, nous aurons, après avoir remplacé ρ_1^2 par $\varkappa_1^2 \operatorname{sn} x^2$,

$$(27) \quad \frac{d^2\rho_0}{dx^2} - [2 \cdot 3k^2 \operatorname{sn} x^2 - 1 - k^2 - 3\vartheta]\rho_0 = -\gamma\cos(f - w) + h\rho_1 + \beta_3\rho_0^3 - p\rho_0 + 3\beta_3\rho_0^2\rho_1.$$

L'intégrale de cette équation s'obtenant à l'aide des formules que nous avons alléguées dans le n° 4, il nous reste maintenant à examiner si le coefficient ν est réel ou imaginaire: dans le premier cas, la fonction ρ_0 peut croître hors de toutes limites, tandis que, dans le second, elle reste comprise entre des limites réelles et déterminées.

Supposé que ρ_0 soit une fonction trigonométrique, du moins quant à son terme principal, on doit déterminer la constante p au moyen de la formule

$$p = \frac{3}{4}\beta_3\varkappa^2.$$

En introduisant cette valeur, avec celle de h, dans l'expression précédente de ϑ, nous aurons

$$\vartheta = -\frac{1}{3}\frac{\gamma}{\varkappa_1} + \frac{1}{4}\beta_3\varkappa^2.$$

Puis, en utilisant l'expression de ν que nous avons obtenue dans le n° 4, à savoir

$$\nu = \frac{3}{2}\sqrt{\vartheta(k^2 - \vartheta)},$$

nous aurons dans le cas actuel:

$$\nu = \frac{3}{2}\sqrt{\vartheta\left(\frac{1}{2}\beta\,\varkappa_1^2 - \vartheta\right)}.$$

Le plus souvent, on trouvera une valeur de ϑ, du premier ordre par rapport aux masses troublantes, de sorte que $\frac{1}{2}\beta_3\varkappa_1^2$ devient une quantité très petite par rapport à ϑ. Lorsqu'on est tombé sur un tel cas, la valeur

de ν est nécessairement imaginaire, ce qui entraine une fonction ne contenant que des termes périodiques comme expression de ρ_0. La valeur de ν serait encore imaginaire, si ϑ était une quantité négative; il nous reste donc à considérer le cas d'une petite valeur positive, tout au plus égale à $\frac{1}{2}\beta_3 x_1^2$.

Reprenons l'équation (26), qui s'écrit aussi de la manière suivante:

$$x_1^3 - 3\left\{\frac{4}{9}\frac{2\sigma\,\gamma_1}{\beta_3} - \frac{2}{3}x^2\right\}x_1 = 2\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\beta_3},$$

il est facile de voir que les plus grandes valeurs numériques de x_1, qu'on en peut tirer, compatibles avec la nature de notre problème, sont celles qui s'obtiennent dans le cas de deux racines égales. Cela admis, on aura:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\beta_3}}$$

ou:

$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\beta_3}}.$$

De ces valeurs extrêmes, on tire les relations suivantes:

$$\frac{\gamma}{x_1} = \frac{3}{16}\beta_3 x_1^2$$

et

$$\frac{\gamma}{x_1} = -\frac{3}{2}\beta_3 x_1^2.$$

Pour conserver plus de généralité, posons:

$$\text{a)} \qquad \frac{\gamma}{x_1} = \frac{3}{2z_0^3}\beta_3 x_1^2,$$

$$\text{b)} \qquad \frac{\gamma}{x_1} = \frac{3}{2z_1^3}\beta_3 x_1^2,$$

z_0 et z_1 étant les racines de l'équation

$$z^3 - 3\omega z = 2,$$

qui, dans le cas de $\omega = 1$, admet:

$$z_0 = 2; \qquad z_1 = -1.$$

En portant les deux valeurs que nous venons d'établir, dans l'expression de ϑ, nous aurons les deux formules que voici:

$$\text{a)} \qquad \vartheta = -\frac{1}{2z_0^3}\beta_3\varkappa_1^2 + \frac{1}{4}\beta_3\varkappa^2,$$

$$\text{b)} \qquad \vartheta = -\frac{1}{2z_1^3}\beta_3\varkappa_1^2 + \frac{1}{4}\beta_3\varkappa^2.$$

Maintenant, en ayant égard à l'expression

$$\nu = \frac{2}{3}\sqrt{\vartheta\left(\frac{1}{2}\beta_3\varkappa_1^2 - \vartheta\right)},$$

nous parviendrons aux résultats:

$$\text{a)} \qquad \nu = \frac{1}{3}\beta_3\sqrt{\left(-\frac{\varkappa_1^2}{z_0^3} + \frac{\varkappa^2}{2}\right)\left[\left(1 + \frac{1}{z_0^3}\right)\varkappa_1^2 - \frac{\varkappa^2}{2}\right]},$$

$$\text{b)} \qquad \nu = \frac{1}{3}\beta_3\sqrt{\left(-\frac{\varkappa_1^2}{z_1^3} + \frac{\varkappa^2}{2}\right)\left[\left(1 + \frac{1}{z_1^3}\right)\varkappa_1^2 - \frac{\varkappa^2}{2}\right]}.$$

La première inspection de ces formules nous montre que la seconde d'elles donne toujours à ν une valeur imaginaire, vu que z_1 est restreint entre les limites 0 et -1. Par contre, la première expression de ν pourrait aboutir à des valeurs réelles de ν. En effet, si la condition

$$2\left(1 + \frac{1}{z_0^3}\right)\varkappa_1^2 > \varkappa^2 > \frac{2\varkappa_1^2}{z_0^3}$$

est satisfaite, les deux facteurs du radical seront positifs, et en conséquence la valeur de ν sera nécessairement réelle. Dans un tel cas (qui cependant est très peu probable, vu que la valeur de z_0 est, le plus souvent, très petite) le mode d'approximation que nous avons entamé dans le présent numéro ne serait plus légitime. Mais on pourrait l'utiliser toutes les fois que la valeur de $\varkappa^2$ resterait moindre que celle de $\frac{1}{4}\varkappa_1^2$.

Cela étant, faisons la remarque que si x^2 est plus grand que $\frac{2x_1^2}{z_0^3}$, il est aussi plus grand que $\frac{1}{4}x_1^2$. D'autre part, toutes les fois que x^2 est plus grand que $\frac{1}{2}x_1^2$, l'application de la méthode que nous avons exposée dans les numéros précédents, nous conduit nécessairement à des résultats exacts. Il y a donc des valeurs de z_0, à savoir celles comprises entre $z_0 = 2$ et $z_0 = \sqrt[3]{4}$, qui peuvent rendre l'application des méthodes du paragraphe présent très difficile ou même douteuse, mais comme, dans ces cas, l'équation du troisième degré n'offre qu'une seule racine réelle, on peut recourir à la méthode du deuxième paragraphe, qui, justement dans le cas actuel, n'offre point de difficulté. En effet, la valeur de n étant réelle, les formules (26) (§ 2) donnent des résultats positifs relativement aux quantités B_0 et B_2, de sorte que la valeur du module, calculée d'après la formule (32), sera tout au plus égale à $\frac{1}{2}$.

Il nous reste encore à faire une observation générale.

Dans le courant des approximations successives, on se heurtera quelquesfois contre des termes contenant l'argument variable hors des signes trigonométriques. Ces termes n'étant pas admissibles, on peut les détruire facilement, comme je l'ai fait voir dans le mémoire *Die intermediäre Bahn des Mondes,* Acta mathematica, T. 7, p. 157, auquel il suffit de renvoyer le lecteur.

(A suivre.)

SUR LA COURBURE DES SURFACES.

Lettre adressée à M. Casorati

PAR

E. CATALAN

À LIÈGE.

Monsieur,

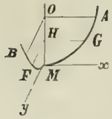
Je quittais Liège quand j'ai reçu le beau Mémoire que vous m'avez fait l'honneur et le plaisir de m'offrir. Cette circonstance de déplacement voux explique le retard de ma réponse. J'ai lu votre Mémoire avec le plus vif intérêt, et j'ai admiré la manière simple et élégante dont vous établissez votre jolie formule:

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

Atteint-elle le but que vous vous étiez proposé? Est-elle d'accord avec *l'idée commune?* Il me paraît que non. Voici l'un des motifs de mes doutes.

R_1 étant supposé positif, C ne change pas quand on y remplace R_2 par $-R_2$. En particulier, si l'on considère le *caténoïde* dans lequel $R_2 = -R_1$, puis la sphère dont le rayon serait R_1, on a, pour ces deux surfaces, en deux points correspondants, $C = \frac{1}{R_1^2}$. Ainsi, *le caténoïde et la sphère auraient même courbure.* Cette conclusion est-elle d'accord avec *l'idée commune?* Je vous le demande.

Autrefois, je me suis occupé de cette question de la *courbure des surfaces,* question sur laquelle je n'ai rien publié. Depuis la lecture de votre Mémoire, mes *vieilles idées* sont revenues; et voici la solution (provisoire) qui en découle.



Coupons un ellipsoïde AMB,[1] par un plan GHF, parallèle au plan tangent en M. Soient λ la distance de ces plans, et E l'aire de la calotte *ellipsoïdique.* D'autre part, considérons la sphère qui aurait O pour centre, et $OM = C$ pour rayon. Soit S l'aire de la calotte *sphérique,* correspondant à la calotte *ellipsoïdique.* Il me semble que l'on pourrait prendre, comme mesure de la courbure en M, la *limite* de $\frac{E}{S}$, répondant à $\lambda = 0$. Il est vrai que l'expression de E contient des intégrales elliptiques.[2] Mais, si l'on développe cette expression suivant les puissances de λ, et qu'ensuite on suppose $\lambda = 0$ $\left(\text{dans } \frac{E}{S}\right)$, *il est possible* que le résultat soit simple. N'ayant ici aucun livre, je ne puis effectuer ce calcul. Je me contente de vous en indiquer le principe, me proposant d'y revenir, *peut-être* (je suis dans mon 77^ième^ *printemps*).

Agréez, Monsieur, l'assurance des sentiments de considération de Votre dévoué vieux collègue.

Spa (Belgique), 17 juin 1890.

---

[1] Ce sera l'ellipsoïde osculateur, si la surface donnée est convexe.

[2] Voir, dans le Journal de Liouville, mon *Mémoire sur l'aire de l'ellipsoïde,* etc.

DIE THEORIE DER REGULÄREN GRAPHS

VON

JULIUS PETERSEN

in KOPENHAGEN.

1. In seinem Beweise für die Endlichkeit des einer binären Form zugehörigen Invariantensystems (Mathematische Annalen, Bd. 33) stützt Hr. HILBERT sich auf einen von Hrn. GORDAN aufgestellten Satz, betreffend eine gewisse Classe diophantischer Gleichungen. Aus diesem Satze folgt, dass man, wenn n gegeben ist, eine endliche Anzahl Producte von der Form

$$(x_1 - x_2)^\alpha (x_1 - x_3)^\beta (x_2 - x_3)^\gamma \ldots (x_{n-1} - x_n)^\varepsilon$$

bilden kann, so dass alle andere Producte derselben Form sich aus den gebildeten durch Multiplication zusammensetzen lassen. Die Producte sind dadurch characterisirt, dass die Exponenten positive, ganze Zahlen (Null mitgerechnet) sind, und dass der Grad in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für jedes Product derselbe ist. Die gebildeten Producte werden wir *Grundfactoren* nennen; sie entsprechen den Grundlösungen der diophantischen Gleichungen. Ist z. B. $n = 3$, so muss man $\alpha = \beta = \gamma$ haben, und der einzige Grundfactor ist

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

Für den Beweis des Hrn. HILBERT ist die Endlichkeit der Anzahl von Grundfactoren ausreichend; für fernere Untersuchungen wird aber die wirkliche Bestimmung dieser Ausdrücke von Bedeutung sein; diese Bestimmung ist der Zweck der folgenden Betrachtungen. Es zeigt sich ein merkwürdiger Unterschied, nachdem der Grad in den einzelnen Buchstaben (der mit dem Grade der entsprechenden Invariante übereinstimmt),

gerade oder ungerade ist. Im ersteren Falle (und nur dieser kommt bei Grundformen ungerader Ordnung vor) stellt sich heraus, dass alle Grundfactoren von dem ersten oder zweiten Grade sind (in den einzelnen Buchstaben); im zweiten, der bei weitem der schwierigere ist, giebt es dagegen Grundfactoren die, für hinlänglich grosses n, von jedem Grade sein können. Der einfachste ist vom dritten Grade für $n = 10$; er ist erst von Hrn. Sylvester bemerkt, der gleichzeitig mit mir die Frage nach den Grundfactoren in Angriff genommen hat, und mit dem ich vielfach darüber verkehrt habe. Obgleich wir die Beantwortung der Frage auf ganz verschiedenem Wege gesucht haben, habe ich doch seinen Mittheilungen eine Erregung zu verdanken, ohne die ich vielleicht längst von den grossen Schwierigkeiten, die sich für jeden Schritt darbieten, ermüdet worden wäre.

2. Man kann der Aufgabe eine geometrische Form geben, indem man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch beliebige Punkte der Ebene repräsentirt, während der Factor $x_m - x_p$ durch eine beliebige Verbindungslinie zwischen x_m und x_p dargestellt wird. Man erhält so für das Product eine Figur, welche aus n Punkten besteht, die so verbunden sind, dass in jedem Punkte gleich viele Linien zusammenlaufen. Dieselben zwei Punkte können durch mehrere Linien verbunden sein. Als Beispiel betrachte man die Figur 1, die das Product

$$(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$$

darstellt.

Englische Verfasser haben für ähnliche Figuren den Namen *graph* eingeführt; ich werde diesen Namen beibehalten und nenne den *graph* regulär, weil in jedem Punkte gleich viele Linien zusammenlaufen. Für Halbinvarianten würden irreguläre *graphs* in Betracht kommen, was doch hier nicht näher besprochen werden soll.

Durch die *Ordnung* eines *graphs* werde ich die Anzahl der Punkte (die Ordnung der binären Grundform) verstehen, durch den *Grad* die Anzahl der in jedem Punkte zusammenlaufenden Linien (den Grad der entsprechenden Invariante). Durch G_α^n oder einfach G_α werde ich einen *graph* von der Ordnung n und vom Grade α verstehen. Ein solcher lässt sich zerlegen oder in Factoren auflösen, wenn man andere *graphs* von derselben Ordnung aber von niedrigerem Grade finden kann, die durch

Überlagerung den gegebenen *graph* herstellen. Ein *graph,* der sich nicht in solcher Weise auflösen lässt, heisst *primitiv.* Unsere Aufgabe geht auf die Bestimmung aller primitiven *graphs* aus.

Sind die Punkte $a, b, c, \ldots$, und bezeichnen wir die Verbindungslinien durch $ab, ac, bc, \ldots$, den *graph* durch $(ab)^{\alpha}(bc)^{\beta}, \ldots$, dann wird in diesem Ausdrucke jeder Buchstabe gleich oft vorkommen, indem die Exponenten berücksichtigt werden.

Gewöhnlich setzen wir voraus, dass der *graph* nicht von *graphs* niedrigerer Ordnung zusammengesetzt ist, das ist, dass er nicht aus Theilen besteht, die unter sich nicht verbunden sind.

Graphs von geradem Grade.

3. *Ein graph zweiten Grades besteht aus geschlossenen Polygonen; sind diese alle von gerader Seitenanzahl, so lässt sich der graph in zwei Factoren ersten Grades zerlegen; in allen anderen Fällen ist er primitiv.*

Wir können nämlich von einem beliebigen Punkte a ausgehen und einer Linie ab folgen; in b laufen zwei Linien zusammen; wir können daher den Weg von b aus z. B. nach c fortsetzen; indem wir so fortfahren und keine Linie mehr als einmal durchlaufen, müssen wir wieder nach a kommen und haben so ein geschlossenes Polygon gefunden; finden sich noch mehrere Linien im *graph,* werden diese in derselben Weise behandelt; am Ende haben wir dann alle Linien des *graphs* als Seiten geschlossener Polygone geordnet. Unter diesen können Zweiecke (Doppellinien) vorkommen.

Bekommen wir in der angegebenen Weise nur ein Polygon, und hat dieses eine gerade Anzahl von Seiten, dann lässt der *graph* sich in zwei Factoren ersten Grades zerlegen, indem die erste, dritte, fünfte, ... Linie zusammengenommen einen *graph* ersten Grades bilden, während dasselbe von den übrigen Seiten gilt. Besteht der *graph* aus p Polygonen, die alle eine gerade Anzahl von Seiten haben, und nehmen wir von jedem der Polygone die Hälfte der Seiten in der angegebenen Weise, dann wird der *graph* zerlegt und zwar durch verschiedene Combination der Polygontheile in 2^{p-1} verschiedenen Weisen. Sind nicht alle Polygone von gerader Seitenanzahl, dann ist der *graph,* wie man leicht sieht, primitiv.

4. Wir wollen annehmen, dass ein *graph* von beliebigem Grade $\alpha + \beta$ sich auf zwei verschiedene Weisen in zwei andere von den Graden α und β zerlegen lässt. Der Überschaulichkeit wegen machen wir die Linien des ersten blau, die Linien des zweiten roth, so dass in jedem Punkte α blaue und β rothe Linien zusammenlaufen. Die zweite Zerlegung muss sich aus der ersten bilden lassen, indem gewisse Linien der zwei Factoren vertauscht werden, das ist, indem gewisse rothe Linien blau und gewisse blaue Linien roth gemacht werden. Diese zwei Systeme von Linien müssen, mit Buchstaben geschrieben $[(ab)^{\alpha}(bc)^{\beta}\ldots]$ dieselben Buchstaben gleich oft enthalten, da die Vertauschung die Anzahl Male, in denen jeder Buchstabe in jedem der Factoren vorkommt, nicht ändern darf. Findet man nun z. B. ab unter den blauen vertauschten Linien, dann muss man unter den rothen b z. B. in bc finden, dann wieder unter den blauen c z. B. in cd und so weiter, bis man a unter den rothen findet. Die Linien, welche vertauscht werden sollen, müssen daher ein oder mehrere geschlossene Polygone bilden, in denen die Seiten abwechselnd roth und blau sind, und die daher alle von gerader Seitenanzahl sind. Die zweite Zerlegung wird erreicht, wenn wir in den besprochenen Polygonen die Farben überall verändern. (Fig. 2 und 3.)

Solche Polygone werde ich *Wechselpolygone* nennen, während eine *Wechsellinie* oder ein *Wechselweg* eine offene polygonale Linie, wo die Seiten abwechselnd roth und blau sind, bedeutet.

Wir haben so den Satz gewonnen:

Wenn ein beliebiger graph sich in mehreren Weisen in zwei Factoren von gegebenen Graden zerlegen lässt (einen blauen und einen rothen), *dann lässt sich jede Zerlegung aus jeder anderen bilden, indem die Seiten gewisser Wechselpolygone ihre Farben verändern.*

Ebenso ist leicht ersichtlich, dass:

Wenn ein beliebiger graph in zwei Factoren zerlegt ist und sich auf der Figur ein Wechselpolygon findet, dann erhält man eine neue Zerlegung, wenn man die Farben aller Seiten des Wechselpolygons verändert.

5. *Jeder graph geraden Grades lässt sich in einem geschlossenen Zuge zeichnen, vorausgesetzt dass er nicht aus Theilen ohne Verbindung besteht.*

Um diesen Satz zu beweisen folgen wir continuirlich den Linien, indem wir von einem beliebigen der Punkte, a, ausgehen und in beliebiger Weise fortschreiten, nur dass keine Linie mehr als einmal durchgelaufen werden darf. Jedes Mal, wenn wir einen Punkt passiren, durchlaufen wir zwei der im Punkte zusammenstossenden Linien, während eine gerade Anzahl (Null mitgerechnet) noch nicht durchgelaufener zurückbleibt. Wenn wir nicht weiter kommen können, müssen wir daher in a sein und alle davon auslaufende Linien passirt haben. Wir haben so einen geschlossenen Zug gebildet. Sind alle darin vorkommende Punkte so oft wie möglich passirt, dann haben wir den ganzen *graph* durchgelaufen, da im anderen Falle ein Theil des *graphs* existierte, der mit dem übrigen Theil ohne Verbindung war.

Ist beim Zuge ein Punkt b zwar passiert, aber nicht so oft wie möglich, dann können wir den Zug bei b öffnen und das eine Ende über b hinaus fortsetzen, bis wir in b wieder den vergrösserten Zug schliessen, wenn alle von b auslaufende Linien passiert sind; in dieser Weise können wir den Zug immer erweitern, bis er alle Linien des *graphs* enthält.

Besteht der *graph* aus mehreren nicht unter sich verbundenen Theilen, so bekommen wir so viele Züge als Theile da sind. Ist dieses nicht der Fall, so zeichnen wir ein geschlossenes Polygon wo die Seiten sich wie im Zuge folgen und wie auf der ursprünglichen Figur bezeichnet werden. War diese vom Grade 2α, dann wird an den Ecken des gezeichneten Polygons jeder der Buchstaben α Mal vorkommen. Dieses Polygon werden wir *den ausgestreckten graph* nennen.

Als Beispiel können wir Fig. 4 betrachten; wir machen hier den Zug

$$ab\ be\ ec\ ca\ ab\ bd\ da.$$

Öffnen wir bei d, können wir hier den Zug

$$dc\ ce\ ed$$

einschalten, und wir können dann den ausgestreckten *graph* (Fig. 5) zeichnen.

Man sieht übrigens leicht, dass der bewiesene Satz auch für nicht reguläre *graphs* gilt, wenn nur in jedem Punkte eine gerade Anzahl von Linien zusammenlaufen. So gilt der Satz z. B. für jede algebraische

Curve, die nicht aus Theilen ohne Verbindung unter sich besteht und mit einer geeigneten Auffassung von unendlichen Zweigen.

6. *Jeder graph vierten Grades lässt sich in zwei Factoren zweiten Grades zerlegen.*

Wird der *graph* (Fig. 4) in der oben entwickelten Weise ausgestreckt, dann erhalten wir ein Polygon (Fig. 5), wo jeder Buchstabe des *graphs* an den Ecken zweimal vorkommt, und welches eine gerade Anzahl von Seiten hat. Farben wir jetzt die Seiten dieses Polygons abwechselnd blau und roth, so sind die Endpunkte der rothen und die Endpunkte der blauen mit denselben Buchstaben bezeichnet, so das jeder Buchstabe bei den blauen zwei Mal vorkommt. Führen wir die Farben der Linien auf den *graph* hinüber, müssen folglich in jedem Punkte zwei rothe und zwei blaue Linien zusammenlaufen (Fig. 6). Der *graph* ist daher in zwei Factoren zweiten Grades zerlegt.

In derselben Weise kann jeder *graph* G_{2a} in zwei Factoren G_a zerlegt werden, wenn nur die ganze Anzahl der Linien gerade ist, dass heisst, wenn nicht α und n beide ungerade sind. Ist dies der Fall, dann ist die genannte Zerlegung unmöglich, da kein *graph* von ungerader Ordnung und ungeradem Grade existiert. Es ist vorausgesetzt, dass der *graph* nicht aus nichtverbundenen Theilen besteht.

7. Aus einem *graph* geraden Grades G_{2a} können wir einen neuen G'_{2a} bilden, indem wir zwei nicht zusammenstossende Linien ab und cd entfernen und für diese zwei neue Linien ac und bd oder ad und bc hineinsetzen. Finden sich mehrere Linien ab, so wird nur die eine entfernt. Ob eine zugesetzte Linie sich schon im *graph* findet, ist ohne Bedeutung; sie bekommt dann eine um eins erhöhte Multiplicität. Ich werde die zwei *graphs gepaart* nennen.

Wenn von zwei gepaarten graphs der eine sich in Factoren zweiten Grades zerlegen lässt, dann lässt sich der andere in eben solche Factoren zerlegen.

Um diesen Satz zu beweisen, denken wir uns, dass G_{2a} in Factoren zweiten Grades zerlegt ist. Finden sich nun ab und cd in demselben

Factor zweiten Grades, dann geht dieser durch die Änderung in einen neuen *graph* zweiten Grades über, während die übrigen Factoren (die auch *ab* und *cd* enthalten können) ungeändert bleiben. $G'_{2\alpha}$ ist somit in Factoren zweiten Grades zerlegt. Finden sich aber *ab* und *cd* in zwei verschiedenen der Factoren, dann bilden wir aus diesen zwei ihr Product, welches vom vierten Grade ist. Gehen wir jetzt zu $G'_{2\alpha}$ über, indem wir die Änderung ausführen, dann geht der Factor vierten Grades in einen neuen Factor vierten Grades über, während alle Factoren zweiten Grades ungeändert bleiben. Nun lässt sich aber, wie oben gezeigt, jeder *graph* vierten Grades in zwei Factoren zweiten Grades zerlegen. $G'_{2\alpha}$ lässt sich also auch in diesem Falle in Factoren zweiten Grades zerlegen.

8. *Durch successive Anwendung der in 7 besprochenen Änderung lässt sich jeder graph in jeden anderen von derselben Ordnung und demselben Grad überführen.*

Wir denken uns, dass wir einen gegebenen *graph* in einen anderen, der den Factor zweiten Grades *ab bc cd de ef ... ka* enthält, überführen wollen. Wir denken uns ferner, dass wir in dem gegebenen *graph* die Linien *ab*, *bc*, *cd* aber nicht *de* finden. Alle von *d* und *e* ausgehende Linien können nicht in einen Punkt zusammenlaufen; wir müssen daher zwei Linien *dg* und *eh* finden können, wo *g* und *h* verschiedene Punkte sind. Wir setzen dann *de* und *gh* statt *dg* und *eh* und haben so *de* eingeführt; ist *cd* mehrfach, dann ist es gleichgültig, ob *g* in *c* fällt; ist *cd* dagegen einfach, dürfen wir nicht *g* in *c* nehmen, um nicht die schon eingeführte Linie *cd* zu entfernen. Da die übrigen von *d* und *e* ausgehenden Linien nicht in einen Punkt zusammenlaufen können, ist es aber immer möglich für *g* einen anderen Punkt als *c* zu wählen. Wir sehen also, dass es immer möglich ist eine neue der gewünschten Linien einzuführen, ohne eine von den schon eingeführten Linien zu entfernen; wir können dann in dieser Weise fortsetzen, bis wir den gegebenen Factor zweiten Grades in dem gebildeten *graph* finden. Wir entfernen jetzt vorläufig diesen Factor und behalten zurück einen *graph*, der wieder so geändert werden kann, dass ein beliebig gegebener Factor zweiten Grades eingeführt wird. Indem wir in dieser Weise fortfahren, bekommen wir zuletzt einen *graph*, der von beliebig gewählten Factoren zweiten Grades

zusammengesetzt ist. Ein anderer *graph* von derselben Ordnung und Grad lässt sich auch in diesen und daher auch in den ersten überführen.

9. *Jeder graph geraden Grades lässt sich in Factoren zweiten Grades zerlegen.*

Wir haben nämlich in 8 gesehen, dass wir eine Reihe *graphs* bilden können, die mit einem beliebig gegebenen anfängt und mit einem in Factoren zweiten Grades zerlegten endigt, und von denen jede zwei nach einander folgende gepaart sind. Zufolge des in 7 bewiesenen Satzes sind dann alle *graphs* in der ganzen Reihe in Factoren zweiten Grades zerlegbar.

Wir haben so das erste Ziel[1] unserer Untersuchungen erreicht, indem wir bewiesen haben, dass wenn wir alle *graphs* ersten Grades und alle primitive *graphs* zweiten Grades bilden, dann lassen sich aus diesen alle anderen von geradem Grade durch Überlagerung (Multiplication) bilden. Daraus folgt, dass die Grundlösungen der diophantischen Gleichungen, durch welche die Exponenten (die Multiplicität der Linien) bestimmt werden, in dem betrachteten Falle nur die Zahlen 0, 1 und 2 sein können.

Wir werden die primitiven *graphs* für die ersten Werthe von n aufstellen. Für $n = 2$ bekommen wir eine einzelne Linie, für $n = 3$, wie Seite 193 angeführt, ein Dreieck; für $n = 4$, zwei einzelne Linien, entsprechend $(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$ und den zwei Produkten, die hieraus durch Vertauschung der Buchstaben gebildet werden können. Die *graphs* von ungeradem Grade geben, was später gezeigt werden soll, zu keinen neuen primitiven *graphs* Veranlassung, so lange $n < 10$. Für $n = 5$ giebt es zwei primitive Formen der *graphs*, die eine das Fünfeck, die andere aus einem Dreiecke und einem Zweiecke zusammengesetzt. Für $n = 6$ ist der von zwei Dreiecken zusammengesetzte *graph* zweiten Grades primitiv, während die übrigen vom zweiten Grade sich zerlegen lassen u. s. w.

10. Ein *graph* vierten Grades lässt sich, wie wir gezeigt haben, immer in zwei Factoren zweiten Grades zerlegen, und zwar im Allgemeinen in verschiedenen Weisen, da die durch Farbung der Linien zer-

---

[1] Mein Beweis war ursprünglich nicht ganz so einfach wie jetzt; die Verbesserung verdanke ich dem Hrn. Direktor Bing.

legte Figur gewöhnlich viele Wechselpolygone enthalten wird. Ich werde beweisen, dass man, einige sehr specielle Fälle ausgenommen, immer zwei beliebige der Linien wählen kann und zwei Zerlegungen der Art bewerkstelligen, dass die zwei Linien sich bei der einen Zerlegung in demselben, bei der anderen in verschiedenen Factoren finden. Mit anderen Worten, wir können in einem zerlegten *graph* ein Wechselpolygon finden, in dem eine beliebig gewählte Linie Seite, eine andere beliebig gewählte Linie nicht Seite ist. Ein solches Polygon wird uns nämlich erlauben die Farbe der einen Linie zu verändern, während die Farbe der anderen ungeändert bleibt. Die Ausnahmefälle treten dann ein, wenn jedes Wechselpolygon, welches die eine Linie als Seite hat, auch die andere als Seite haben muss, so dass beide Linien gleichzeitig die Farben verändern müssen. Ich werde zwei Linien mit dieser Eigenschaft *gepaart* nennen. Sie können dieselbe oder verschiedene Farben haben. Das gepaarte Linien vorkommen können, ersehen wir durch die folgende Überlegung.

Ein *graph* zweiten Grades, also auch ein *graph* vierten Grades, ist von geschlossenen Polygonen zusammengesetzt, wo alle Seiten eines Polygons dieselbe Farbe haben. Eine oder mehrere beliebige, geschlossene Curven müssen jedes der Polygone eine gerade Anzahl Male schneiden (Null mitgerechnet). Wenn daher der *graph* aus zwei Theilen besteht, die unter sich nur durch zwei Linien verbunden sind, müssen diese zu demselben Polygone gehören und daher dieselbe Farbe haben. Zwei solche Linien sind also gepaart. Überhaupt muss jede geschlossene Curve eine gerade Anzahl rother und eine gerade Anzahl blauer Linien schneiden. Wir wollen annehmen, dass wir eine oder mehrere geschlossene Curven der Art zeichnen können, dass die Anzahl der Schnittpunkte mit den Linien des *graphs* für zwei der Linien eine gerade (Null mitgerechnet), für die übrigen eine ungerade ist. Wir können dann beweisen, dass die zwei Linien gepaart sind.

1) n gerade. Ist die Seitenanzahl des Polygons zu dem die eine Linie gehört, gerade, dann muss die zweite Linie zu demselben Polygon gehören, da die ganze Anzahl von Schnittpunkten mit allen Seiten des Polygons gerade ist. Ist die Seitenanzahl des Polygons ungerade, muss es noch ein Polygon mit ungerader Seitenanzahl und von derselben Farbe geben; die zweite Linie muss dann zu diesem Polygone gehören. In beiden Fällen müssen die zwei Linien gepaart und von derselben Farbe

sein. Im ersten Falle sind die Polygone alle von gerader Seitenanzahl und der *graph* lässt sich also in Factoren ersten Grades zerlegen; im zweiten Falle sind alle rothe oder alle blaue Polygone von gerader Seitenanzahl, so dass der eine Factor sich zerlegen lässt.

2) n ungerade. Es müssen wenigstens ein rothes und ein blaues Polygon von ungerader Seitenanzahl vorkommen, und in jedem von diesen muss eine der Linien Seite sein. Die zwei Linien sind also gepaart und haben verschiedene Farben.

Es entsteht die Frage ob die hier gefundenen hinlänglichen Bedingungen auch notwendig sind; diese Frage wird später beantwortet.

Kann man eine oder mehrere Curven der Art zeichnen, dass für jede Linie die Anzahl der Schnittpunkte eine ungerade ist, so kann von den Polygonen keines eine ungerade Seitenanzahl haben; der *graph* lässt sich dann, wie früher gezeigt, in vier Factoren ersten Grades zerlegen. Dieser Satz lässt sich nicht umkehren.

Wir wollen annehmen, dass wir eine Anzahl geschlossener Curven der Art gezeichnet haben, dass die Anzahl der Linien, die eine ungerade Anzahl von Schnittpunkten haben, so gross wie möglich ist. Die Curven theilen die Ebene in Flächenstücke, die wir uns abwechselnd als schwarz oder weiss denken wollen.[1] Gehen wir continuirlich von einem Stück in ein anderes über, dann müssen wir die Curven eine gerade oder eine ungerade Anzahl Male passieren, je nachdem die zwei Flächenstücke ähnlich oder verschieden gefarbt sind. Wir wollen dieses benützen, um einem *graph* eine mehr überschauliche Form zu geben. Wir ziehen eine Gerade und setzen die Punkte des *graphs,* deren Lage ja ohne Bedeutung ist, auf der einen oder der andern Seite der Geraden ab, je nachdem sie ursprünglich in einem weissen oder einem schwarzen Flächentheil liegen. Ziehen wir nun die Verbindungslinien, so werden diese von der Geraden einmal oder gar nicht geschnitten, je nachdem ihre ursprüngliche Anzahl von Schnittpunkten ungerade oder gerade war, denn wenn Schnittpunkte durch continuirliche Änderung zum Verschwinden gebracht werden, müssen sie immer zu Paaren verschwinden. Wir ersehen hieraus, dass die Bedingung dafür, dass alle Linien mit den Curven eine ungerade Anzahl

[1] Dass dieses möglich ist, beweist man leicht, indem man bei kleinen Änderungen der Curven bewerkstelligen kann, dass diese sich nicht schneiden.

von Schnittpunkten bekommen können, ist, dass die Punkte des *graphs* in zwei solche Systeme zerfallen, das Punkte des einen Systems nur mit Punkten des anderen Systems verbunden sind.

11. Wir wollen jetzt die Bedingung dafür suchen, dass zwei Linien des *graphs* ab und cd gepaart sind. Um diese zu finden, zeichnen wir den *graph* ausgestreckt und erhalten dadurch ein geschlossenes Polygon mit abwechselnd rothen und blauen Seiten. Die Ecken sind mit den Buchstaben des *graphs* $a, b, c, \ldots$ bezeichnet, und jeder der Buchstaben findet sich bei zwei Ecken. Wir ziehen dann die *Verbindungslinien* (Fig. 7) $aa, bb, cc, \ldots$ und nennen diese *gerade* oder *ungerade,* je nachdem sie eine gerade oder eine ungerade Anzahl Seiten des Polygons abschneiden. Bei den geraden endigen die abgeschnittenen Theile mit Linien verschiedener Farbe, bei den ungeraden mit Linien derselben Farbe.

Wir können auf unserer Figur alle Wechselwege des gegebenen *graphs* verfolgen. Wir haben nur dem Umkreise des Polygons zu folgen, doch so, dass wir von jedem Punkte zu dem anderen Ende seiner Verbindungslinie hinüberspringen können, um von dort aus mit der passenden Farbe weiter zu gehen. Wir bemerken, dass die Richtung, in der wir das Polygon umkreisen, durch einen solchen Sprung geändert oder nicht geändert wird, je nachdem die Verbindungslinie ungerade oder gerade ist.

Wenn wir jetzt untersuchen wollen, ob ab und cd gepaart sind, dann ziehen wir quer über das Polygon eine Linie, welche ab und cd schneidet, und die wir die *Querlinie* nennen wollen. (Fig. 7.)

Wenn die Querlinie keine Verbindungslinie schneidet, so sind ab und cd gepaart, denn der *graph* besteht dann aus zwei Theilen, die nur durch ab und cd verbunden sind.

Wenn die Querlinie eine gerade Verbindungslinie z. B. mm schneidet, dann sind ab und cd nicht gepaart.

Wir können nämlich von a aus über b und weiter nach m gehen und dann über die Verbindungslinie nach der zweiten Ecke m springen; da mm gerade ist, wird die Umlaufsrichtung nicht geändert, und wir können daher weiter zu a dem Umkreise folgen. Wir haben dann ein Wechselpolygon ama gebildet, in dem ab aber nicht cd Seite ist. Die zwei Linien können daher nicht gepaart sein.

Wenn die Querlinie alle ungeraden und keine gerade Verbindungslinie schneidet, dann sind ab und cd gepaart.

Wenn wir nämlich wie oben mit *ab* anfangen, können wir mit einem Wechselweg, ohne *cd* zu passieren, nie nach *a* kommen. Wir müssen nämlich, um von *b* aus nach *a*, also auf die andere Seite der Querlinie, zu kommen, eine ungerade Anzahl von ungeraden Verbindungslinien passiren. Wie wir auch gehen, müssen wir daher jedesmal, wenn wir uns auf derselben Seite der Querlinie wie *a* befinden, in der Richtung von *a* weg fortschreiten. In jedem Wechselpolygon, wo *ab* Seite ist, muss daher auch *cd* Seite sein, das heisst, die zwei Linien sind gepaart.

Wir haben so eine ausreichende Bedingung dafür gefunden, dass *ab* und *cd* gepaart sind und werden jetzt beweisen dass, mit einer speciellen Ausnahme, die Bedingung auch notwendig ist. Um diesen Beweis zu erleichtern, wollen wir erst eine Bemerkung thun.

Eine ungerade Verbindungslinie schneidet vom Polygon ein Stück ab, dessen äusserste Seiten dieselben Farben haben. Wir wollen ein solches Stück umkehren, so dass die zwei Endpunkte ihren Platz vertauschen; wir haben dadurch die Linien des *graphs* im ausgestreckten *graph* eine neue Ordnung gegeben, ohne dass die Farben dadurch verändert sind. Das Umkehren hat aber den Einfluss gehabt, dass jede Verbindungslinie zwischen einem Punkte des umgekehrten Stückes und einem nicht zu diesem gehörigen Punkte ihre Natur gewechselt hat, so dass die geraden ungerade, die ungeraden gerade geworden sind. Wird z. B. (Fig. 7) das Stück *fecbaf* umgekehrt, dann werden *aa*, *bb* und *cc* ungerade, während *ee* gerade wird.

Wir werden jetzt annehmen, dass die Querlinie nur ungerade Verbindungslinien, aber nicht alle solche Linien schneidet. Sei *mm* eine ungerade Verbindungslinie, die von der Querlinie nicht geschnitten wird. Wir merken uns alle Verbindungslinien, welche *mm* schneiden, ebenso alle die, welche wiederum diese schneiden und so weiter; es können dann zwei Fälle eintreten:

1.) Wir erreichen in dieser Weise keine Verbindungslinie, welche die Querlinie schneidet; wir erreichen also nur Punkte welche auf derselben Seite der Querlinie liegen; sind die äussersten *r* und *s* (Fig. 8), dann kommt jeder Buchstabe, der sich von *r* bis *s* findet, dort zweimal

vor; diese Punkte sind dann auf dem *graph* unter sich verbunden und stehen nur durch zwei Linien *rp* und *sq* mit dem übrigen Theil des *graphs* in Verbindung. *rp* und *sq* müssen dann dieselbe Farbe haben, und jeder Wechselweg, der durch *pr* in den abgeschnittenen Theil hineintritt, muss diesen durch *sq* verlassen; wir können daher, wenn wir von *ab* aus Wechselpolygone bilden wollen, den Theil des Polygons von *p* nach *q* ganz fortlassen, indem wir ihn durch eine Linie *pq* ersetzen, welcher Linie wir die für *rp* und *sq* gemeinschaftliche Farbe geben. Es kann mehrere solche Stücke geben; sie werden dann in derselben Weise behandelt, und wir betrachten nur den *reducierten graph.*

2.) Wir kommen durch das angegebene Verfahren einst zu einer Verbindungslinie, welche die Querlinie schneidet. Diese sei *ff*; sie wurde gefunden als eine andere Verbindungslinie *gg* schneidend, diese als *hh* schneidend und so weiter; indem wir so zurückgehen, müssen wir einst eine ungerade Verbindungslinie begegnen, wenn nicht früher dann, wenn wir zu *mm* kommen. Sei *kk* die erste ungerade Verbindungslinie die wir treffen; wir haben dann eine Reihe von Verbindungslinien, wo die erste *ff* und die letzte *kk* ungerade, die übrigen gerade sind; jede schneidet die vorhergehende und die nachfolgende und keine andere, und nur *ff* schneidet die Querlinie.

Wenn wir jetzt in der früher angegebenen Weise *kk* umkehren, dann wird die nächste in der Reihe ungerade; kehren wir diese um, so wird wieder die nächste ungerade und so weiter, bis *gg* ungerade und zuletzt *ff* gerade wird. Wir wissen aber, dass wenn die Querlinie eine gerade Verbindungslinie schneidet, dann werden *ab* und *cd* nicht gepaart.

Hiermit ist der folgende Satz bewiesen:

Die notwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass in einem graph zwei Linien gepaart sind, ist, dass die zu den zwei Linien im ausgestreckten, reducierten graph gehörige Querlinie alle ungeraden und keine gerade Verbindungslinie schneidet.

Um diese Bedingung mit den früher gefundenen unvollständigen Bedingung in Verbindung zu bringen, zeichnen wir den ausgestreckten *graph* in Zickzack (Fig. 9), so dass die Ecken abwechselnd Spitzen und Thäler bilden. Eine gerade Verbindungslinie verbindet dann zwei Spitzen

oder zwei Thäler; während eine ungerade eine Spitze mit einem Thal verbindet. Es giebt dann mehrere Fälle:

1.) n ungerade. ab und cd gleichfarbig. (Fig. 9.) Auf der einen Seite der Querlinie findet man eine gerade Anzahl von Spitzen und eine gerade Anzahl von Thälern, während auf der anderen Seite die Anzahl beider ungerade ist. Der im Satze besprochene Fall kann hier nicht eintreten, denn die ungeraden Verbindungslinien sollten eine gerade Anzahl Spitzen auf der einen Seite der Querlinie mit einer ungeraden Anzahl Thälern auf der anderen Seite verbinden, was unmöglich ist. Die gepaarten Linien müssen daher ungleichfarbig sein.

2.) n gerade; ab und cd ungleichfarbig.

Auf jeder Seite der Querlinie findet man eine gerade Anzahl von Spitzen und eine ungerade Anzahl von Thälern oder umgekehrt. Die ungeraden Verbindungslinien können auch hier nicht gezogen werden; die gepaarten Linien müssen also gleichfarbig sein. Wir haben also den Satz:

In einem graph sind gepaarte Linien gleichfarbig, wenn die Ordnung des reducierten graphs gerade, ungleichfarbig, wenn diese Ordnung ungerade ist.

Wir müssen erinnern, dass bei der Reduction nur solche Theile zu entfernen sind, in denen die zu untersuchenden Linien nicht vorkommen. Haben wir z. B. einen *graph* zehnter Ordnung, der, wenn wir für zwei Linien pr und qs die neuen pq und rs setzen, sich in zwei *graphs* fünfter Ordnung theilt, dann müssen zwei gepaarte Linien, die beide in einem Theil liegen, ungleichfarbig sein, während sie, wenn in jedem der Theile eine der Linien liegt, gleichfarbig sein müssen.

12. Wir gehen jetzt von dem ausgestreckten *graph* zu dem wirklichen *graph* über, indem wir die Punkte auf beiden Seiten einer Geraden AB absetzen; wir thun dieses in der Weise, dass wir auf der einen Seite alle Punkte absetzen, deren entsprechende Buchstaben sich an den Spitzen der einen Seite und an den Thälern der anderen Seite der Querlinie befinden. Auf der entgegengesetzten Seite von AB werden dann die Punkte abgesetzt, deren entsprechende Buchstaben an den Thälern der ersten und an den Spitzen der zweiten Seite der Querlinie sich finden. Eine solche Absetzung ist immer möglich, wenn ab und cd gepaart sind, denn ist z. B.

mm gerade, dann stehen die zwei Buchstaben *m* beide an Spitzen oder beide an Thälern auf derselben Seite der Querlinie; ist aber *mm* ungerade, dann steht *m* einmal an einer Spitze auf der einen Seite und einmal an einem Thal auf der anderen Seite der Querlinie. Wir verbinden jetzt die Punkte mit den Linien des *graphs*. *a* und *b* sind auf derselben Seite, ebenso *c* und *d*. Die Linien *ab* und *cd* werden daher nicht von *AB* geschnitten. Dagegen muss *AB* jede andere Linie schneiden, wie die folgende Überlegung zeigt. Ist *mm* gerade, und finden wir an dem einen Ende die Polygonseiten αm und $m\beta$, am anderen Ende γm und $m\delta$, dann stehen *m* und *m* an zwei Spitzen (Thälern) auf der einen Seite der Querlinie, während $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ an Thälern (Spitzen) steht. Wird *m* über *AB* abgesetzt, so müssen daher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unter *AB* abgesetzt werden, und die vier von *m* auslaufenden Linien schneiden alle *AB*. Ist *mm* ungerade, kommen wir auf ähnliche Weise zu demselben Resultat. Also:

Wenn zwei Linien gepaart sind, kann der reducierte graph so gezeichnet werden, dass eine Gerade alle Linien nur nicht die zwei gepaarten schneidet.

Gehen wir continuirlich zu einer beliebigen Lage der Punkte über, so bekommen wir statt *AB* eine oder mehrere geschlossene Curven, die die gepaarten Linien eine gerade, die übrigen eine ungerade Anzahl Male schneiden. Liegen *ab* und *cd* auf verschiedenen Seiten von *AB*, so muss die Ordnung gerade sein, und die zwei Linien haben dieselbe Farbe; jedes geschlossene Polygon, welches beide Linien oder keine von ihnen enthält, muss von gerader Seitenanzahl sein, während ein Polygon, welches nur die eine Linie enthält, eine ungerade Anzahl von Seiten haben muss. Liegen *ab* und *cd* auf derselben Seite von *AB*, dann muss die Ordnung ungerade sein und die Linien daher verschiedene Farben haben.

Graphs von ungeradem Grade.

13. Während unter den *graphs* geraden Grades sich keine primitiven von höherem Grade als dem zweiten finden, lassen sich primitive *graphs* von jedem ungeraden Grade construiren. Ist der Grad z. B. $2\alpha + 1$, dann können wir von einem Punkte aus $2\alpha + 1$ Linien ziehen, und jede dieser Linien mit zwei α-fache Linien fortsetzen, die dann durch eine $\alpha + 1$-fache Linie

verbunden werden. Der so entstandene *graph* von der Ordnung $6\alpha + 4$ ist offenbar primitiv, denn der erste Punkt kann nicht in einem geschlossenen Polygon Ecke werden, und der *graph* kann daher keinen Factor zweiten Grades haben. Ist $\alpha = 1$, bekommen wir in dieser Weise den früher genannten SYLVESTER'schen *graph*, der überhaupt der einfachste primitive *graph* ungeraden Grades ist. (Fig. 11.)

Wir wollen die Ordnung, die gerade sein muss, mit $2n$ bezeichnen und den folgenden Satz beweisen:

Ein graph, dessen Grad höher als $\frac{2n}{3} + 1$ *ist, kann nicht primitiv sein.*

Wir denken uns, dass wir auf dem *graph* vom Grade g ein System von α Linien aufsuchen deren 2α Endpunkte alle verschieden sind. Es giebt viele solche Systeme; wir wählen dasjenige, für welches α seinen grössten Werth hat. Wird $\alpha = n$, dann bilden die n Linien einen Factor ersten Grades, und der *graph* lässt sich in diesen und Factoren zweiten Grades zerlegen. Ist der *graph* primitiv, muss daher $\alpha < n$ sein. Wir farben die α Linien roth und alle übrigen Linien blau.

Die α Linien verbinden 2α Punkte zu Paaren; die übrigen $2n - 2\alpha$ Punkte haben unter sich keine Verbindungslinie; die davon auslaufenden $2g(n - \alpha)$ Linien müssen daher alle zu den 2α Punkten gehen; diese sind unter sich durch die α und z. B. β andere Linien verbunden; indem diese von beiden Endpunkten aus gezählt werden, haben wir dann

$$2\alpha g = 2(\alpha + \beta) + 2g(n - \alpha).$$

Wir betrachten jetzt eine von den α rothen Linien z. B. ab; wir können nicht zwei Linien ac und bd finden, wo c und d zwei verschiedene der $2n - 2\alpha$ Punkte sind, denn in solchem Falle hätten wir nicht ab sondern ac und bd roth gefarbt und dadurch α grösser bekommen; von a und b zusammen genommen können daher höchstens g Linien zu den $2n - 2\alpha$ Punkten gehen, so dass wenigstens g (Linien zwischen a und b zweimal gerechnet) unter den $2(\alpha + \beta)$ sich finden müssen. Wir haben daher

$$2(\alpha + \beta) \geqq \alpha g,$$

und wenn wir dieses in die obige Gleichung einsetzen,

$$2\alpha g \geqq \alpha g + 2g(n - \alpha),$$

woraus

$$\alpha \geq \frac{2n}{3}.$$

Es sind also immer wenigstens die zwei Drittel der Punkte zu Paaren verbunden.

Wir wollen jetzt annehmen, dass wir $\alpha = n - 1$ haben. Die $2n - 2$ Punkte sind dann zu Paaren verbunden, während die zwei übrigen, a und b, nicht verbunden sind. Wir bilden dann einen neuen *graph,* indem wir zwei Linien ac und bd, wo c und d verschiedene Punkte sind, durch ab und cd ersetzen. Für diesen *graph* ist $\alpha = n$, und er lässt sich daher in einen Factor ersten Grades und in Factoren zweiten Grades zerlegen. ab findet sich in dem Factor ersten Grades; wenn cd auch dort wäre, dann könnten wir wieder ac und bd für ab und cd einsetzen, und der gegebene *graph* wäre zerlegt. cd muss sich daher in einem Factor zweiten Grades finden. Wird dieser mit dem Factor ersten Grades multiplicirt, und ac und bd wieder eingeführt, dann ist der gegebene *graph* in einen Factor dritten Grades und Factoren zweiten Grades zerlegt. Für $\alpha = n - 1$ kann also ein primitiver *graph* nur vom dritten Grade sein.

Ist $\alpha = n - 2$, so operiren wir in derselben Weise und finden, dass der *graph,* wenn er primitiv ist, höchstens vom fünften Grade sein kann. In derselben Weise können wir fortfahren, bis wir den kleinsten Maximalwerth für α erreichen; dieser ist $n - \frac{n}{3}$ und entspricht einem primitiven *graph,* der höchstens vom Grade $\frac{2n}{3} + 1$ ist. w. z. b. w.

Wir sahen oben, dass α grösser gemacht werden konnte, wenn wir zwischen zwei von den $2n - 2\alpha$ Punkten einen Wechselweg $cabd$ finden konnten; dasselbe gilt wenn wir zwischen zwei von den $2n - 2\alpha$ Punkten überhaupt einen Wechselweg finden können, denn verändert man die Farben der Seiten eines solchen Weges, so wird die Anzahl der rothen Linien um eins vergrössert. Man beweist leicht, dass diese Bedingung auch notwendig ist.

14. Indem wir die α Linien aufs Geradewohl ausnehmen und dann mittelst Wechselwege α zu vergrössern suchen, können wir untersuchen, ob ein gegebener *graph* primitiv ist oder nicht; es entsteht aber die Frage,

ob die primitiven *graphs* sich nicht durch einfache Kennzeichen von den zerlegbaren scheiden. Es spricht etwas dafür, dass ein primitiver *graph* *Blätter* haben muss, indem ein Blatt ein solcher Theil des *graphs* ist, der nur durch eine einzelne Linie mit dem übrigen Theil in Verbindung steht. Ich habe daher versucht dieses zu beweisen, habe aber die Schwierigkeiten so gross gefunden, dass ich die Untersuchung auf den *graph* dritten Grades beschränkt habe. Die Aufgabe lässt sich in vielfacher Weise umformen; es kommt ja nur darauf an, dass die Wege im *graph* sich immer verzweigen und zusammenlaufen, die Wege brauchen aber nicht eben Linien zu sein. Ich werde nur die folgende Fassung nennen: Wir haben ein geschlossenes Netz von einer geraden Anzahl von Dreiecken bestehend; jede Linie ist Seite in zwei Dreiecken; welche ist die Bedingung dafür, dass wir durch Entfernung von einigen Linien die Dreiecke zwei und zwei zu Vierecke vereinigen können? In dieser Fassung scheint die Aufgabe mit den functionen- und gruppentheoretischen Untersuchungen von Klein und W. Dyck in enger Verbindung zu stehen. Ob die Untersuchung dadurch erleichtert werden kann, wird dahingestellt.

15. Wenn wir in einem G_3 auf einem beliebigen Wege fortschreiten, wo keine Linie mehr als einmal durchgelaufen werden darf, dann können wir nicht weiter kommen, wenn wir einen Punkt zum zweiten Mal erreichen; wir werden einen solchen Weg eine *Kette* nennen; wenn wir die Kette vorwärts und rückwärts so weit wie möglich fortsetzen, muss sie mit geschlossenen Polygonen schliessen; bilden wir auch Ketten von den übrigen Linien, werden diese mit freien Endpunkten schliessen können, nämlich, wenn der Endpunkt sich schon in einer anderen Kette befindet; die letzten Ketten werden gewöhnlich nur aus einer Linie bestehen. Da jeder Punkt einmal und nur einmal als Endpunkt einer Kette auftreten darf, haben wir den Satz:

Jeder G_3^{2n} lässt sich in n Ketten auflösen.

Wir werden die Ketten nach der Anzahl ihrer Linien *gerade* oder *ungerade* nennen.

16. *Wenn der graph sich in n ungerade Ketten auflösen lässt, ist er nicht primitiv.*

Um diesen Satz zu beweisen, machen wir die Linien jeder Kette abwechselnd roth und blau, so dass die Endlinien immer blau sind. Werden die Ketten dann wieder zusammengesetzt, dann geht von jedem Punkt des *graphs* zwei blaue und eine rothe Linie aus; die blauen bilden dann einen Factor zweiten, die rothen einen Factor ersten Grades.

Wenn der *graph* primitiv ist, müssen daher gerade Ketten vorkommen; wenn diese wie die ungeraden gefarbt werden, bekommen sie eine rothe und eine blaue Endlinie. Werden die Ketten wieder zusammengesetzt, dann finden wir im *graph* für jede gerade Kette einen Punkt mit zwei rothen und einer blauen Linie, während die übrigen Punkte zwei blaue und eine rothe Linie haben. Giebt es α Punkte der ersten Art, dann findet man im *graph* $\frac{1}{2}[\alpha + 2(2n - \alpha)]$ blaue Linien; *die Anzahl der geraden Ketten ist daher eine gerade.*

Wir setzen voraus, dass die Zerlegung so gemacht ist, dass α so klein wie möglich ist. Wenn wir von Wegen reden, sind immer Wechselwege darunter verstanden.

Zwischen zwei roth-roth-blauen Punkten kann kein Weg gehen, dessen Endlinien beide roth sind.

Findet sich nämlich ein solcher Weg, dann können wir durch Veränderung der Farben seiner Linien α um zwei verkleinern.

17. Wir werden jetzt einen Theil des *graphs* aus den Ketten bilden, indem wir mit einer geraden Kette $abc\ldots kl$ anfangen, wo ab roth, kl blau ist. Kommt l nicht früher in der Kette vor, dann muss es sich in einer anderen Kette und zwar nicht als Endpunkt finden; wir theilen dann diese Kette bei l in zwei Stücke und verlängern die gerade Kette mit dem Stücke, das bei l eine rothe Linie hat. Nach der Verlängerung muss die gerade Kette, zufolge des zuletzt aufgestellten Satzes, wieder mit einer blauen Linie endigen, das ist, wieder gerade sein. Wir dürfen daher voraussetzen, dass l auch im Innern der geraden Kette vorkommt, so dass alle drei von l auslaufenden Linien sich auf der gezeichneten Figur befinden; wir nennen einen solchen Punkt *vollständig.* Indem wir, wie gleich gezeigt werden wird, unsere Figur erweitern, nennen wir immer einen Punkt, der von a aus mit einer rothen Linie erreicht werden kann

einen *R-Punkt*, während die Punkte, die von a aus *nur* mit blauen Linien erreicht werden können, *B-Punkte* genannt werden. (Fig. 10.)

Wir erweitern unsere Figur, indem wir allmählig zu allen R-Punkten die dort anschliessenden Ketten fügen. Diese Ketten müssen alle ungerade sein, da zufolge des oben bewiesenen Satzes, der von a ausgehende Weg nicht mit einer rothen Linie schliessen kann. Eine zugefügte Kette kann in einem unvollständigen R-Punkt oder B-Punkt endigen und macht dann diesen Punkt vollständig. Im ersten Falle kann die Kette von a aus in beiden Richtungen durchgelaufen werden, so dass alle ihre Punkte R-Punkte werden (Fig. 10); auch Punkte, die früher B-Punkte waren, können durch die Zufügung in R-Punkte übergehen. Eine zugefügte Kette kann auch in einem Punkte schliessen, den wir nicht früher gehabt haben; wir sehen in derselben Weise wie bei der geraden Kette, dass wir immer annehmen dürfen, dass ein solcher Punkt vollständig ist, indem die Kette in sich selbst schliesst. Die Kette bildet am Ende ein Polygon; ist dieses von ungerader Seitenanzahl, so werden alle ihre Ecken R-Punkte (Fig. 10). Wenn wir nicht mit Zufügungen länger fortsetzen können, haben wir aus einer geraden und übrigens ungeraden Ketten eine Figur gebildet, die die folgenden Eigenschaften hat:

Alle Punkte können von a aus auf Wechselwege erreicht werden, denn jede zugefügte Kette fängt mit blau an und schliesst sich an einem Punkt, der mit roth erreicht werden kann.

Alle R-Punkte sind vollständige Punkte; sie können alle von a aus mit einer rothen Linie erreicht werden und möglicherweise auch mit einer blauen.

Die B-Punkte können vollständig oder unvollständig sein, aber immer nur mit einer blauen Linie erreicht werden. Ein Weg, der nach einem B-Punkte führt, kann gar nicht oder nur in einer Richtung weitergeführt werden.

a ist ein freier Punkt oder, wenn a in einer zugefügten Kette sich findet, ein vollständiger Punkt, jedoch ein solcher, in den zwei rothe und eine blaue Linie zusammenlaufen; er ist der einzige vollständige Punkt dieser Art.

Wenn der Punkt a vollständig ist, werden wir, wenn es möglich ist, die Figur erweitern, indem wir nicht allein ab sondern auch die zweite von a auslaufende rothe Linie als Anfangslinie unserer Wege nehmen

wollen. Dadurch werden vielleicht frühere B-Punkte in R-Punkte übergehen und dadurch die Zufügung neuer ungeraden Ketten erlauben. Die angeführten Eigenschaften der endlichen Figur werden dadurch nicht verändert werden.

Wir werden jetzt die construirte Figur etwas näher untersuchen.

18. Wir können von a aus alle Linien unserer Figur auf Wechselwege durchlaufen; es giebt aber hier einen Unterschied, indem einige nur in einer, andere in beiden Richtungen durchgelaufen werden können. Die ersten wollen wir *einpfeilig*, die anderen *zweipfeilig* nennen. Bei einem unvollständigen B-Punkt sind beide Linien einpfeilig, die blaue gegen den Punkt, die rothe vom Punkte weg gerichtet.

Eine rothe zweipfeilige Linie muss an jedem Ende wenigstens eine anschliessende blaue zweipfeilige Linie haben.

Sei mn die rothe Linie (Fig. 12), mp, mq, nr, ns blaue Linien. Gehen wir von m nach n, müssen wir von p oder von q kommen und können den Weg nach r sowohl als nach s fortsetzen; ähnlich wenn der Weg von n nach m führt. Es werden also entweder mp oder mq und entweder nr oder ns zweipfeilig. Die zwei übrigen blauen Linien können einpfeilig sein *und müssen dann von m und n weg gerichtet sein.*

Eine zweipfeilige blaue Linie muss an jedem Ende eine anschliessende, zweipfeilige Linie haben.

Eine blaue Linie kann einen Wechselweg schliessen; ist dieses hier nicht der Fall, sieht man leicht, dass die anschliessenden rothen Linien beide zweipfeilig sind, und dass die einpfeiligen blauen Linien wie im vorigen Falle nach aussen gerichtet sind.

Sei nun mn (Fig. 13) blau, pm und nq roth. Diese müssen dann wenigstens die Richtungen pm und qn haben; haben sie auch die Richtungen mp und nq, dann ist der Satz richtig; wir wollen daher annehmen dass pm einpfeilig ist; es muss dann der Wechselweg, mit dem wir von n nach m kommen, mit nm schliessen, er muss dann früher über m geführt haben, so dass sein letztes Stück $pml \ldots nm$ ist, wo ml die zweite zu m gehörige blaue Linie bedeutet. Der Weg lässt sich dann aber auch so schliessen: $pmn \ldots lm$, so dass ml zweipfeilig ist. Wenn also eine der an-

schliessenden rothen Linien einpfeilig ist, dann ist die anschliessende blaue Linie zweipfeilig, und damit ist der Satz bewiesen.

Wir bemerken besonders, dass *die einpfeilige rothe Linie gegen m gerichtet ist.*

Die Anfangslinie ab ist einpfeilig, wenn a ein freier Punkt ist; ist a ein vollständiger R-Punkt, dann sind die zwei rothen Linien zweipfeilig, und die blaue, wenn einpfeilig, von a weg gerichtet; ist a ein B-Punkt, dann sind die drei Linien einpfeilig.

19. Aus den zwei bewiesenen Sätzen folgt, dass die zweipfeiligen Linien, wenn sich solche finden, ein oder mehrere geschlossene Systeme bilden müssen; die Punkte eines solchen Systems können vollständig oder unvollständig sein; (in der ursprünglichen Figur sind sie alle vollständig) in den letzten schliessen sich einpfeilige Linien an, und wir haben gesehen, dass diese, wenn sie roth sind, nach dem Systeme, wenn sie blau sind von dem Systeme weg gerichtet sind.

In jedes der Systeme zweipfeiliger Linien kann nur eine rothe Linie hineinführen.

Sei pm eine rothe Linie, die in das System hineinführt; indem wir pm als Ausgangslinie unserer Wege nehmen, können wir entweder alle Linien des Systems in beiden Richtungen durchlaufen oder nicht; in dem ersten Falle kann keine andere rothe Linie qr in das System hineinführen, denn indem wir von pm nach r mit blau kommen können, würden wir den Weg nach q fortsetzen können, und qr wäre dann zweipfeilig. Im zweiten Falle würde sich ein kleineres System von zweipfeiligen Linien (mit Rücksicht auf pm) bilden lassen können; dieses System müsste sich in Linien fortsetzen, die von pm aus einpfeilig wären; es müssten dann andere rothe Linien in das System hineinführen, so dass man von diesen aus die einpfeiligen in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen konnte. Wir denken uns dass ein solcher Weg das zweipfeilige System mit der Linie $\alpha\beta$ erreicht; wir könnten dann den Weg $pm \dots \beta\alpha \dots$ gehen und dadurch das zu a als Anfangspunkt gehörige zweipfeilige System mit einer rothen Linie verlassen. Da dieses unmöglich ist, kann nur eine rothe Linie in das System hineinführen; wir können von dieser aus alle Punkte des Systems mit roth erreichen und daher das System mittelst jeder an-

schliessenden blauen Linie verlassen. Giebt es im System α vollständige und β unvollständige Punkte (der Eintrittspunkt unter den ersten gerechnet), dann ist die Anzahl von blauen Linien $\frac{1}{2}(2\alpha + \beta)$; die Anzahl der anschliessenden einpfeiligen blauen Linien ist daher gerade; sie kann Null sein, und das System bildet dann ein Blatt.

Der Punkt a muss besonders betrachtet werden; ist er ein R-Punkt, dann findet er sich in einem Systeme von zweipfeiligen Linien; man beweist wie oben, dass keine rothe Linie in dieses System hineinführen kann, und dass das System mittelst jeder anschliessenden blauen Linie verlassen werden kann. Die Anzahl dieser Linien ist ungerade.

20. Wir ziehen jetzt jedes zweipfeiliges System in einen Punkt zusammen; wir haben dann eine Figur mit folgenden Eigenschaften:

Man kann von a aus jeden Punkt erreichen.

Die neugebildeten Punkte sind (a ausgenommen) alle R-Punkte (wir wollen sie, wo sie ausgezeichnet werden sollen, als NR-Punkte bezeichnen); die blauen Linien können bei ihnen in beliebiger, doch gerader Anzahl vorkommen. Ist diese Anzahl Null, dann endigt der Weg mit einer rothen Linie an einem Blatte.

Alle Linien sind einpfeilig.

Der Anfangspunkt kann ein freier Punkt sein: die Wege können dann nur mit ab anfangen; oder er kann ein vollständiger B-Punkt sein: die Wege können mit beiden rothen Linien anfangen; er kann endlich ein NR-Punkt sein: es laufen dann von ihm eine ungerade Anzahl blauer Linien aus; jede von diesen kann als Anfangslinie der Wege genommen werden.

Wir werden uns jetzt die neue Figur in der Weise allmählig aufgebaut denken, dass wir erst von a aus einen beliebigen Wechselweg zeichnen, den wir so lange wie möglich fortsetzen; wo von diesem Wege Verzweigungen von R-Punkten auslaufen, fügen wir neue Wege hinzu und fahren so fort, bis unsere ganze Figur construirt ist; indem wir dieses thun, bezeichnen wir den jeden Augenblick vorkommenden Überschuss der Anzahl unvollständiger R-Punkte über die Anzahl unvollständiger B-Punkte mit d.

Da jeder zugefügter Weg mit blau anfängt und mit blau endigt, so hat er, wenn wir von dem Anfangspunkte und dem Endpunkte absehen,

ebenso viele unvollständige R-Punkte als unvollständige B-Punkte. Die Veränderung von d bei einer Zufügung wird daher nur von der Natur des Anfangspunktes und Endpunktes abhängen.

Die Anfangspunkte der zugefügten Wege sind immer unvollständige R-Punkte; die Endpunkte können nicht R-Punkte sein, denn dann würden die zugefügten Linien zweipfeilig werden. Eine zugefügte Kette kann daher die Natur der schon vorhandenen Punkte nicht verändern. Wir sind dadurch von der grössten Schwierigkeit, die die Untersuchung der ursprünglichen Figur darbot, befreit worden, denn diese bestand eben darin, dass eine Zufügung B-Punkte in R-Punkte überführen konnte.

Im Allgemeinen wird so durch die Zufügung eines Weges am Anfang ein unvollständiger R-Punkt, am Ende ein unvollständiger B-Punkt verschwinden, indem sie in vollständige Punkte übergehen. Ein zugefügter Weg wird daher im allgemeinen d nicht verändern. Hier sind doch folgende Fälle zu beachten:

Wenn der Weg zu einem Blatte führt, wird d um zwei verkleinert. Wir werden annehmen, dass es β Blätter giebt.

Wenn a ein NR-Punkt ist, wird die eine seiner blauen Linien als Anfangslinie des ersten Weges genommen; die übrigen werden alle Anfangslinien von zugefügten Wegen; erst, wenn der letzte von diesen zugefügt wird, wird der Punkt vollständig; ist die Anzahl der Linien p, so wird daher durch diese Zufügungen d um $p - 2$ vergrössert.

Ein NR-Punkt wird erst mit einer Kette passirt und dadurch die rothe und eine blaue Linie gezeichnet und der Punkt ist dann ein unvollständiger R-Punkt; die übrigen blauen Linien werden alle Anfangslinien von zugefügten Wegen, und erst, wenn der letzte von diesen gezeichnet wird, wird der Punkt vollständig; ist die Anzahl der blauen Linien p, so wird auch von einem solchen Punkte eine Vergrösserung von d um $p - 2$ herrühren. Wir wollen annehmen, dass es r NR-Punkte giebt (a, wenn er ein R-Punkt ist, mitgerechnet, die Blätter nicht mitgerechnet), und dass von diesen im Ganzen l blaue Linien hinauslaufen; die ganze von diesen Punkten herrührende Vergrösserung von d ist dann $l - 2r$; der Werth dieser Grösse ist positiv oder Null; nur wenn a der einzige NR-Punkt ist und nur eine blaue Linie hat, ist der Werth -1; wir werden diesen Fall, wo a ein Blatt repräsentirt, vorläufig ausschliessen.

Wir zeichnen den ersten Weg von a aus beliebig, doch so, dass wir ihn durch a führen, wenn dieser Punkt vollständig ist. Wenn dieser Weg gezeichnet ist, hat d einen Werth, den wir mit ∂ bezeichnen wollen; wenn die ganze Figur gezeichnet ist, hat d dann den Werth

$$\partial + l - 2r - 2\beta$$

bekommen; es giebt dann keine unvollständige R-Punkte und eine Anzahl unvollständiger B-Punkte, die wir mit b bezeichnen wollen; es ist also

$$-b = \partial + l - 2r - 2\beta$$

oder

$$2\beta = b + \partial + l - 2r.$$

Wir werden jetzt ∂ bestimmen; wir können annehmen, dass der erste Weg nicht in einem Blatte schliesst; wir rechnen gewiss dadurch, wenn er in einem Blatt endigt, ∂ um zwei zu gross; wir rechnen aber dann auch β um eins zu gross, da das Blatt sich nicht in den zugefügten Wegen findet. Das Resultat wird daher nicht geändert.

Es giebt nun folgende Fälle:

1) a ist ein freier Punkt. Man hat dann $\partial = 2$. (Fig. 10.)

2) a ist ein vollständiger B-Punkt; indem a passirt wird, wird ein unvollständiger B-Punkt verloren; daher ist $\partial = 3$. (Fig. 15.)

3) a ist ein R-Punkt; die erste Linie ist blau und $\partial = 1$. (Fig. 16.)

Wir werden erst den letzten Fall beseitigen.

Hat a nur eine blaue Linie, dann ist a ein Blatt; dieser wird mit den Wegen nicht erreicht und kommt daher unter den β Blättern nicht vor. b muss ungerade sein; ist $b \geq 3$, so haben wir also wenigstens drei Blätter; ist $b = 1$, haben wir zwei Blätter; unsere Figur steht dann aber mit dem übrigen Theil des *graphs* nur durch eine Linie in Verbindung; der übrige Theil bildet daher ein Blatt, und der *graph* hat auch in diesem Falle wenigstens drei Blätter. (Fig. 17.)

In dem zweiten Falle war $\partial = 3$; b ist ungerade. Ist $b \geqq 3$ wird $\beta \geqq 3$. Ist $b = 1$, sehen wir wie im vorigen Falle, dass der *graph* wenigstens drei Blätter hat.

Wir haben so nur übrig den ersten Fall zu untersuchen. b ist gerade, und wenn $b \geqq 4$ ist, wird $\beta \geqq 3$. Wir brauchen daher nur $b = 0$ und $b = 2$ zu betrachten.

$b = 2$. Da die Anzahl gerader Ketten eines *graphs* gerade ist, können wir eine neue gerade Kette nehmen und ganz wie früher fortfahren; die neue Figur kann mit der alten in Verbindung treten; sie kann eine Kette durch a senden; in dieser muss a ein B-Punkt sein; es kann eine Kette in einem der unvollständigen B-Punkte schliessen; ein solcher Punkt wird dann vollständig mit einpfeiligen Punkten. Indem wir jetzt die ganze Figur einpfeilig machen und wie früher aufbauen wird d wegen der neuen mit roth anfangenden Anfangslinie (ausser der früheren) um zwei vergrössert. Der *graph* hat also auch in diesem Falle wenigstens drei Blätter.

$b = 0$. Wir operiren wie im vorigen Falle; die neue Figur wird hier in sich abgeschlossen; wir brauchen daher nur den Fall zu betrachten, wo wieder für die neue Figur $b = 0$ ist. Wir haben dann zwei Blätter; wenn es mehrere gerade Ketten gäbe, müsste dann auch in diesem Falle der *graph* wenigstens drei Blätter haben. Wir setzen daher voraus, dass die zwei geraden Ketten die einzigen sind. Es giebt dann im *graph* nur zwei Punkte A und B mit zwei rothen und einer blauen Linie, während die übrigen zwei blaue und eine rothe Linie haben; von jedem der zwei Punkte A und B führt eine rothe Linie zu einem Blatte. Wir können aber zeigen, dass wir immer dafür Sorge tragen können, dass dieser Fall nicht eintritt. Wir können nämlich von A aus, mit der nicht nach dem Blatte laufenden rothen Linie anfangend, einen beliebigen Wechselweg nach einem Punkte C führen, und zwar so, dass die letzte Linie dieses Weges blau ist. Verändern wir dann die Farben dieses Weges, so wird der Punkt mit zwei rothen und einen blauen Linie nach C verlegt. Hier muss dann die eine gerade Kette anfangen, und ihre erste rothe Linie kann nicht direct zu dem Blatte führen.

Wir haben so den folgende Satz bewiesen:

Ein primitiver graph vom dritten Grade muss wenigstens drei Blätter haben.

Aus diesem Satze können wir verschiedene Folgerungen ziehen.

21. Ein nicht primitiver *graph* dritten Grades lässt sich in einen Factor zweiten und einen Factor ersten Grades zerlegen; wir wollen die Linien des ersten blau, die Linien des zweiten roth machen. Finden sich Wechselpolygone, dann können neue Zerlegungen dadurch abgeleitet werden;

es kann aber vorkommen, dass gewisse Linien nicht ihre Farben ändern können, also nicht in Wechselpolygonen Seiten sind. Besteht z. B. der *graph* aus zwei Theilen, die nur durch eine Linie verbunden sind, dann kann diese nicht in einem geschlossenen Polygone Seite sein und muss daher roth sein.

Wir wollen annehmen dass eine rothe Linie ab notwendig roth sein muss; wir theilen sie in einem Punkte m, und fügen in m eine Linie mn mit einem Blatte zu. Der neue *graph* muss primitiv sein, denn wäre er zerlegbar, dann musste mn roth, am und mb blau sein; durch Wegnahme von mn und dem Blatte, hatten wir dann eine Zerlegung des ursprünglichen *graphs*, bei der ab blau war. Der neue *graph* ist also primitiv und hat daher wenigstens drei Blätter; der ursprüngliche *graph* muss daher auch Blätter haben. Also:

Ein zerlegbarer graph, in dem eine rothe Linie ihre Farbe nicht ändern kann, muss Blätter haben.

22. Wir wollen annehmen, dass wir einen primitiven *graph* mit drei Blättern haben. Nehmen wir zwei Linien ab und cd, jede in einem Blatte liegend, fort und setzen für diese ac und bd, dann hat der neue *graph* nicht drei Blätter und ist daher zerlegbar. Wir müssen daher für den gegebenen *graph* $\alpha = n - 1$ (Siehe 13) haben; also:

In einem primitiven graph dritten Grades mit drei Blättern können wir immer $n - 1$ *Linien finden, die die* $2n - 2$ *Punkte zu Paaren verbinden.*

Man sieht leicht, wie sich dieser Satz erweitern lässt.

23. Durch die obige Entwickelung haben wir nicht nur den Satz betreffend die Anzahl der Blätter bewiesen, sondern wir haben auch den Weg gefunden auf den wir alle primitive *graphs* direct construiren können; wir können nämlich die einpfeiligen Systeme ganz nach Belieben zeichnen, wenn wir nur die angegebenen Regeln für die Erweiterung beobachten; ist dieses gethan, können wir bei den NR-Punkten beliebige zweipfeilige Systeme mit angemessener Anzahl von anschliessenden Linien einschalten. Finden sich noch unvollständige B-Punkte, kann der *graph* beliebig ver-

vollständigt werden, nur dass keine Punkte mit zwei rothen Linien dadurch entstehen dürfen.

Da ein Blatt wenigstens drei Punkte hat, wird Fig. 11 den einfachsten primitiven *graph* darstellen. In Fig. 14 haben wir ein primitiver *graph* vierzehnter Ordnung.

Für *graphs* von höherem Grade habe ich die Untersuchung nicht durchgeführt; es scheint doch, dass der hier befolgte Weg auch dort zum Ziel führen kann.

ÜBER EINE NUMERISCHE BERECHNUNG
DER ARGUMENTE DER CYKLISCHEN, HYPERBOLISCHEN UND ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

C. RUNGE
in HANNOVER.

Die Methode, durch welche ARCHIMEDES seinen Näherungswerth der Zahl π fand, ist einer Vervollkommnung fähig, auf welche meines Wissens bisher nicht aufmerksam gemacht worden ist.[1] In ihrer verbesserten Form bietet sie ein geeignetes Mittel dar, um die Argumente der Exponential- und Kreis-Functionen so wie der hyperbolischen und elliptischen Functionen zu berechnen, wenn die Werthe der Functionen gegeben sind.

ARCHIMEDES berechnete an Stelle des Umfanges eines Kreises mit dem Radius 1 den Umfang eines eingeschriebenen und den eines umschriebenen regulären Vielecks. Der Umfang des Kreises liegt zwischen diesen beiden Werthen, welche beliebig nahe an einander rücken, wenn die Seitenzahl hinreichend gesteigert wird. Den Umfang eines regulären Vielecks mit grosser Seitenzahl fand er, indem er successive aus dem Umfang des Sechsecks, welcher gleich 6 ist, den Umfang des Zwölfecks, aus diesem den des Vierundzwanzigecks u. s. w. berechnete. Die Seite des eingeschriebenen regulären n-Ecks ist gleich $2\sin u$, wenn mit u der n^{te} Theil von π bezeichnet wird, und die Seite des umschriebenen regulären n-Ecks ist gleich $2\tan u$. Aus den Werthen von $\sin u$ und $\tan u$ kann man $\sin\frac{u}{2}$ und $\tan\frac{u}{2}$ finden, welche verdoppelt die Seiten des eingeschriebenen und umschriebenen $2n$-Ecks darstellen.

[1] Vgl. Nachschrift.

Diese Methode lässt sich auf jede Function anwenden, sobald es möglich ist, aus dem Werthe der Function für ein gegebenes Argument den Werth derselben für die Hälfte des Arguments zu berechnen.

Sei nämlich $f(u)$ eine beliebige Function von u, welche in eine convergente Reihe nach Potenzen von u entwickelt werden kann

$$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots.$$

Wenn es möglich ist aus $f(u)$ den Werth von $f\left(\frac{u}{2}\right)$ und mithin den Werth von $f\left(\frac{u}{2^n}\right)$ für jeden ganzzahligen Werth von n zu berechnen, so kann man daraus den Werth von u finden. Denn es ist:

$$f\left(\frac{u}{2^n}\right) = a_0 + a_1 \frac{u}{2^n} + a_2 \frac{u^2}{2^{2n}} + \dots$$

und folglich

$$2^n\left[f\left(\frac{u}{2^n}\right) - a_0\right] = a_1 u + a_2 \frac{u^2}{2^n} + \dots.$$

Für grosse Werthe von n werden auf der rechten Seite alle Glieder ausser dem ersten sehr klein, und man erhält einen Näherungswerth für $a_1 u$, aus dem durch Division mit a_1 die Grösse u gefunden wird, vorausgesetzt dass a_1 von Null verschieden ist. Wäre a_1 gleich Null, so müsste man mit 2^{2n} statt mit 2^n multipliciren und es würde

$$2^{2n}\left[f\left(\frac{u}{2^n}\right) - a_0\right]$$

ein Näherungswerth für $a_2 u^2$ sein. Würde auch a_2 verschwinden, so könnte man durch Multiplication mit 2^{3n} einen Näherungswerth für $a_3 u^3$ gewinnen u. s. w.

Dieses Verfahren ist das nämliche, welches Legendre zur Berechnung elliptischer Integrale angewendet hat.

Ist

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \qquad \text{so ist} \qquad \frac{u}{2} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

wo φ_1 aus den Gleichungen

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\gamma}, \qquad \sin\gamma = k\sin\varphi$$

gefunden wird.

Denkt man sich φ als Function von u dargestellt $\varphi = f(u)$, so kann man also $\varphi_1 = f\left(\frac{u}{2}\right)$ berechnen. Aus φ_1 findet man auf dieselbe Weise $\varphi_2 = f\left(\frac{u}{4}\right)$ u. s. f. Setzt man das Verfahren n Mal fort, so liefert $2^n\varphi_n$ einen Näherungswerth für u. Statt φ kann man auch $\sin\varphi$ als Function von u betrachten. Die Abhängigkeit zwischen $\sin\varphi$ und $\sin\varphi_1$ ist eine algebraische durch Quadratwurzeln darstellbare, was in den Fällen ein Vorzug ist, wo etwa der zu erreichenden Genauigkeit wegen trigonometrische Tafeln nicht zu Gebote stehn.

Gegen diese Art der Berechnung ist einzuwenden, dass die Zahl der Schritte manchmal beträchtlich ist, um eine nennenswerthe Genauigkeit zu erzielen. Man kann aber dieses Verfahren des Archimedes, wie wir es nennen wollen, so modificiren, dass die berechneten Näherungswerthe sich viel schneller dem gesuchten Werthe nähern.

Es sei wieder

$$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_n u^n + \ldots.$$

Dann ist

$$f\left(\frac{u}{2^\alpha}\right) = a_0 + a_1\frac{u}{2^\alpha} + a_2\frac{u^2}{2^{2\alpha}} + \ldots + a_n\frac{u^n}{2^{n\alpha}} + \ldots.$$

Um keine Nenner schreiben zu müssen, möge $a_\lambda = 2^{\lambda n} b_\lambda$ gesetzt werden. Dann hat man

$$f\left(\frac{u}{2^n}\right) = a_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots + b_{n+1} u^{n+1} + b_{n+2} u^{n+2} + \ldots,$$

$$f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) = a_0 + b_1 2u + b_2 2^2 u^2 + \ldots + b_{n+1} 2^{n+1} u^{n+1} + b_{n+2} 2^{n+2} u^{n+2} + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(u) = a_0 + b_1 2^n u + b_2 2^{2n} u^2 + \ldots + b_{n+1} 2^{(n+1)n} u^{n+1} + b_{n+2} 2^{(n+2)n} u^{n+2} + \ldots.$$

Diese Gleichungen sollen mit Constanten multiplicirt und addirt werden, und zwar sollen die Constanten so gewählt sein, dass auf der rechten Seite in der Summe alle Glieder fortfallen, welche $u^2, u^3, \ldots, u^{n+1}$ enthalten. Bezeichnet man die Constanten der Reihe nach mit $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ und bezeichnet mit $\varphi(x)$ die ganze Function n^{ten} Grades

$$\varphi(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n,$$

so kann man die Summe

$$C_0 f\left(\frac{u}{2^n}\right) + C_1 f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) + \ldots + C_n f(u)$$

folgendermassen schreiben:

$$a_0\varphi(1) + b_1\varphi(2)u + b_2\varphi(2^2)u^2 + \ldots + b_{n+1}\varphi(2^{n+1})u^{n+1} + b_{n+2}\varphi(2^{n+2})u^{n+2} + \ldots.$$

Um die Coefficienten von $u^2, u^3, \ldots, u^{n+1}$ zum Verschwinden zu bringen, hat man $C_0, C_1, \ldots, C_n$ so zu bestimmen, dass

$$\varphi(2^2) = \varphi(2^3) = \ldots = \varphi(2^{n+1}) = 0.$$

D. h. $C_0, C_1, \ldots, C_n$ müssen den Coefficienten von

$$(x - 2^2)(x - 2^3)\ldots(x - 2^{n+1})$$

proportional sein.

Der Proportionalitätsfactor werde so bestimmt, dass $\varphi(2) = 2^n$ ist. Man setze also:

$$\varphi(x) = 2^n \frac{(x - 2^2)(x - 2^3)\ldots(x - 2^{n+1})}{(2 - 2^2)(2 - 2^3)\ldots(2 - 2^{n+1})}$$

oder

$$\varphi(x) = \frac{x - 2^2}{1 - 2} \cdot \frac{x - 2^3}{1 - 2^2} \frac{x - 2^4}{1 - 2^3} \cdots \frac{x - 2^{n+1}}{1 - 2^n}.$$

Dann ist

$$C_0 f\left(\frac{u}{2^n}\right) + C_1 f\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right) + \ldots + C_n f(u) - a_0\varphi(1)$$

oder, was dasselbe ist

$$C_0\left[f\left(\frac{u}{2^n}\right) - a_0\right] + C_1\left[f\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right) - a_0\right] + \ldots + C_n[f(u) - a_0]$$

ein Näherungswerth für $a_1 u$ und die Abweichung von $a_1 u$ ist gleich:

$$b_{n+2}\varphi(2^{n+2})u^{n+2} + b_{n+3}\varphi(2^{n+3})u^{n+3} + \ldots$$

oder, wenn man statt der Grössen b wieder die ursprünglichen Coefficienten der Entwicklung von $f(u)$ einführt,

$$a_{n+2}\frac{\varphi(2^{n+2})}{2^{n(n+2)}}u^{n+2} + a_{n+3}\frac{\varphi(2^{n+3})}{2^{n(n+3)}}u^{n+3} + \ldots .$$

Hebt man aus jedem der Factoren des Zählers von $\varphi(2^{n+\alpha})$ $2^{n+\alpha}$ heraus, so wird:

$$\varphi(2^{n+\alpha}) = 2^{n(n+\alpha)}\frac{1-2^{-n-\alpha+2}}{1-2}\frac{1-2^{-n-\alpha+3}}{1-2^2}\cdots\frac{1-2^{-\alpha+1}}{1-2^n}.$$

Und schreibt man zur Abkürzung

$$\partial_{\alpha-1} = (1-2^{-\alpha+1})(1-2^{-\alpha})\ldots(1-2^{-\alpha-n+2}),$$

so nimmt der Ausdruck für die Abweichung des Näherungswerthes die Gestalt an:

$$\frac{1}{(1-2)(1-2^2)\ldots(1-2^n)}[a_{n+2}\partial_1 u^{n+2} + a_{n+3}\partial_2 u^{n+3} + \ldots].$$

Die Grössen ∂ sind sämmtlich positiv, nehmen mit wachsendem Index zu und nähern sich der Grenze 1. Daraus erhellt, dass die unendliche Reihe zugleich mit der unendlichen Reihe für $f(u)$ convergirt und divergirt. Die Gleichung ist mithin nur für solche Werthe von u richtig, für welche die Reihe für $f(u)$ convergirt. Für solche Werthe erhält man aber bald sehr genaue Näherungswerthe, selbst wenn die Convergenz der Reihe $f(u)$ langsam ist. Denn bezeichnet r die Summe der absoluten Beträge von $a_{n+2}u^{n+2}$, $a_{n+3}u^{n+3}$, ..., so ist die Abweichung des Näherungswerthes absolut genommen kleiner als

$$\frac{r}{(2-1)(2^2-1)\ldots(2^n-1)}.$$

Es ist aber der natürliche Logarithmus des unendlichen Productes $(1-2^{-1})(1-2^{-2})\ldots$ gleich

$$\Sigma l(1-2^{-n}) = -\sum\sum \frac{1}{\lambda} 2^{-\lambda n}$$

$$= -\sum \frac{1}{\lambda}\frac{2^{-\lambda}}{1-2^{-\lambda}}$$

$$= -\sum \frac{1}{\lambda}\frac{1}{2^{\lambda}-1}$$

$$= -\sum \frac{1}{\lambda}\frac{1}{2^{\lambda}} - \sum \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2^{\lambda}-1} - \frac{1}{2^{\lambda}}\right)$$

$$= -l(2) - \sum \frac{1}{\lambda}\frac{1}{2^{\lambda}(2^{\lambda}-1)}.$$

Also wie man leicht findet

$$-\Sigma l(1-2^{-n}) < l(2) + 0,6.$$

Mithin ist die Abweichung des Näherungswerthes kleiner als

$$2^{-\frac{n(n+1)}{2}} \cdot 2e^{0,6} \cdot r$$

oder auch kleiner als

$$r2^{-\frac{n(n+1)}{2}+2}.\ [1]$$

Man sieht aus dieser Form, dass die Genauigkeit des Verfahrens selbst bei langsamer Convergenz d. h. wenn r mit wachsendem n nur langsam abnimmt, beträchtlich ist. Denn für $n = 10$ ist z. B. schon $2^{-\frac{n(n+1)}{2}+2}$ kleiner als 10^{-16}. In besonderen Fällen wird man eine noch etwas kleinere Grenze für die Genauigkeit ableiten können, wenn man nicht, wie es hier der Einfachheit wegen geschah, die Grössen δ gleich 1 setzt.

Sind von den Coefficienten der Reihe $f(u)$ einige Null, so kann man die Constanten $C_0, C_1, \ldots, C_n$ zweckmässiger bestimmen. Denn es verschwinden alsdann in der Entwicklung

$$a_0\varphi(1) + b_1\varphi(2)u + b_2\varphi(2^2)u^2 + \ldots$$

---

[1] Zur Berechnung von $\prod(1-2^{-k})$ kann man sich auch der EULER'schen Formel bedienen $\prod(1-x^k) = \sum(-1)^k x^{\frac{3k^2\pm k}{2}}$ und findet so $\prod(1-2^{-k}) = 0,288788\ldots.$

einige Glieder von selbst, und für diese braucht dann natürlich φ nicht gleich Null zu sein. Statt dessen lassen sich dann eben so viel weitere Glieder zum Verschwinden bringen, wodurch eine grössere Genauigkeit des Näherungsverfahrens erreicht wird. Ehe diese Betrachtungen durchgeführt werden, soll indessen ein Beispiel die Methode erläutern.

Man findet leicht

$$\text{für} \quad n = 1 \qquad \varphi(x) = 4 - x,$$

$$\text{für} \quad n = 2 \qquad 3\varphi(x) = 32 - 12x + x^2,$$

$$\text{für} \quad n = 3 \qquad 21\varphi(x) = 512 - 224x + 28x^2 - x^3,$$

$$\text{für} \quad n = 4 \quad 315\varphi(x) = 16384 - 7680x + 1120x^2 - 60x^3 + x^4$$

und

$$\varphi(1) = 2^{n+1} - 1.$$

Will man nun z. B. den natürlichen Logarithmus von 2 berechnen, so ist zu setzen $f(u) = e^u = 2$, $f\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{2}$, $f\left(\frac{u}{4}\right) = \sqrt[4]{2}$ u. s. w. Für $n = 4$ ist, da u kleiner als 1 sein muss, $r < \frac{1}{\underline{|6}} + \frac{1}{\underline{|7}} + \ldots < \frac{7}{6\underline{|6}} < 17 \cdot 10^{-4}$. Die Abweichung ergiebt sich mithin kleiner als

$$2^{-8} \cdot 17 \cdot 10^{-4} < 7 \cdot 10^{-6}.$$

Will man den Näherungswerth auf 6 Stellen berechnen, so sind $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[8]{2}$, $\sqrt[16]{2}$ noch etwas genauer als auf 6 Stellen in die Rechnung einzuführen. Denn der Fehler von $\sqrt[16]{2}$ wird ja auch mit C_0 multiplicirt der von $\sqrt[8]{2}$ mit C_1 u. s. w. Da die Summe der absoluten Beträge von C_0, $C_1, \ldots, C_4$ oder $\varphi(-1)$ etwa gleich 80 ist, so genügt es jedenfalls mit acht Decimalen zu rechnen.

Bedient man sich der Thomas'schen Rechenmaschine so braucht ein einigermassen geübter Rechner nicht mehr als 8 Minuten um den Näherungswerth 0,6931473 zu finden. Mit Benutzung dieses Werthes kann man zeigen, dass die Genauigkeit noch grösser ist als oben überschlagen wurde. Denn da $l(2)$ hiernach kleiner als 0,7 ist, so wird $r < \frac{1}{\underline{|6}} \cdot \frac{10}{9} (0,7)^6$. Die oben gefundene Grenze reducirt sich dadurch auf weniger als 0,12 ihres früheren Betrages und ergiebt sich demnach kleiner als $84 \cdot 10^{-8}$.

Wesentlich kürzer gestaltet sich die Rechnung, wenn in der Entwicklung von $f(u)$ eine Reihe von Coefficienten Null sind. Es sollen für den Fall, dass nur ungerade Potenzen vorkommen und für den Fall, dass nur gerade Potenzen vorkommen, die Formeln ausführlich entwickelt werden.

Ist

$$f(u) = a_1 u + a_2 u^3 + a_3 u^5 + \ldots + a_{n+1} u^{2n+1} + a_{n+2} u^{2n+3} + \ldots$$

so sind die Multiplicatoren $C_0, C_1, \ldots, C_n$ den Coefficienten von

$$(x - 2^3)(x - 2^5) \ldots (x - 2^{2n+1})$$

proportional zu setzen. Und damit in dem Ausdrucke für

$$C_0 f\left(\frac{u}{2^n}\right) + C_1 f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) + \ldots + C_n f(u)$$

der Coefficient von u gleich a_1 sei, bestimmt man den Proportionalitätsfactor so, dass $\varphi(2) = 2^n$ und setzt demnach

$$\varphi(x) = 2^n \frac{x - 2^3}{2 - 2^3} \frac{x - 2^5}{2 - 2^5} \ldots \frac{x - 2^{2n+1}}{2 - 2^{2n+1}} = \frac{x - 2^3}{1 - 2^2} \frac{x - 2^5}{1 - 2^4} \ldots \frac{x - 2^{2n+1}}{1 - 2^{2n}}.$$

Die Abweichung des Näherungswerthes ergiebt sich gleich

$$a_{n+2} \frac{\varphi(2^{2n+3})}{2^{n(2n+3)}} u^{2n+3} + a_{n+3} \frac{\varphi(2^{2n+5})}{2^{n(2n+5)}} u^{2n+5} + \ldots.$$

Nun ist aber

$$\frac{\varphi(2^{2n+2\alpha+1})}{2^{n(2n+2\alpha+1)}} = \frac{(1 - 2^{-2n-2\alpha+2})(1 - 2^{-2n-2\alpha+4}) \ldots (1 - 2^{-2\alpha})}{(1 - 2^2)(1 - 2^4) \ldots (1 - 2^{2n})}.$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$\varepsilon_\alpha = (1 - 2^{-2\alpha})(1 - 2^{-2\alpha-2}) \ldots (1 - 2^{-2\alpha-2(n-1)})$$

so wird daher die Abweichung des Näherungswerthes

$$\frac{1}{(1 - 2^2)(1 - 2^4) \ldots (1 - 2^{2n})} \left[a_{n+2} \varepsilon_1 u^{2n+3} + a_{n+3} \varepsilon_2 u^{2n+5} + \ldots\right]$$

Die Grössen ε sind positiv und kleiner als 1, wachsen mit wachsendem

Index und nähern sich der Grenze 1. Bezeichnet man die Summe der absoluten Beträge von $a_{n+2}u^{2n+3}$, $a_{n+3}u^{2n+5}$ u. s. w. mit r, so ergiebt sich der absolute Betrag der Abweichung kleiner als

$$\frac{r}{2^{n(n+1)}} \cdot \frac{1}{(1-2^{-2})(1-2^{-4})\ldots(1-2^{-2n})}.$$

Nun ist

$$l\frac{1}{(1-2^{-2})(1-2^{-4})\ldots(1-2^{-2n})\ldots} = \sum\sum\frac{1}{\lambda}2^{-2\lambda\mu} = \sum\frac{1}{\lambda}\frac{2^{-2\lambda}}{1-2^{-2\lambda}}$$

$$= \sum\frac{1}{\lambda}\frac{1}{4^\lambda-1} = \sum\frac{1}{\lambda}\frac{1}{4^\lambda} + \sum\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{4^\lambda-1}-\frac{1}{4^\lambda}\right)$$

$$= l\left(\frac{4}{3}\right) + \sum\frac{1}{\lambda}\frac{1}{4^\lambda(4^\lambda-1)} < l\left(\frac{4}{3}\right) + 0{,}086.$$

Also

$$\frac{1}{(1-2^{-2})(1-2^{-4})\ldots(1-2^{-2n})} < \frac{4}{3}.1{,}1 < 1{,}5.$$

Mithin ist die Abweichung des Näherungswerthes absolut genommen kleiner als

$$1{,}5r2^{-n(n+1)}.$$ [1]

Enthält andrerseits $f(u)$ nur gerade Potenzen von u

$$f(u) = a_0 + a_1u^2 + a_2u^4 + \ldots + a_{n+1}u^{2n+2} + a_{n+2}u^{2n+4} + \ldots$$

so wird man die Multiplicatoren so wählen, dass in der Summe

$$C_0f\left(\frac{u}{2^n}\right) + C_1f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) + \ldots + C_nf(u)$$

die Potenzen $u^4, u^6, \ldots, u^{2n+2}$ wegfallen, d. h. man nimmt $C_0, C_1, \ldots, C_n$ den Coefficienten von

$$(x-2^4)(x-2^6)\ldots(x-2^{2n+2})$$

---

[1] Mit Hilfe der oben erwähnten EULER'schen Formel erhält man

$$\prod(1-4^{-k}) = 0{,}68854.$$

Darnach ist die Abweichung kleiner als $1{,}46r2^{-n(n+1)}$.

proportional. Den Proportionalitätsfactor wählt man so, dass in der Summe u^2 nur mit a_1 multiplicirt erscheint, dass also $\varphi(2^2) = 2^{2n}$ ist. Demnach hat man zu setzen

$$\varphi(x) = 2^{2n} \frac{x - 2^4}{2^2 - 2^4} \frac{x - 2^6}{2^2 - 2^6} \cdots \frac{x - 2^{2n+2}}{2^2 - 2^{2n+2}} = \frac{x - 2^4}{1 - 2^2} \frac{x - 2^6}{1 - 2^4} \cdots \frac{x - 2^{2n+2}}{1 - 2^{2n}},$$

$\varphi(1)$ ist dann gleich $\frac{2^{2n+2} - 1}{3}$ und es wird der Näherungswerth gleich

$$C_0 f\left(\frac{u}{2^n}\right) + C_1 f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) + \cdots + C_n f(u) - \frac{2^{2n+2} - 1}{3} a_0$$

oder auch, da $\varphi(1) = C_0 + C_1 + \cdots + C_n$

$$C_0\left[f\left(\frac{u}{2^n}\right) - a_0\right] + C_1\left[f\left(\frac{u}{2^{n-1}}\right) - a_0\right] + \cdots + C_n[f(u) - a_0].$$

Dieser Näherungswerth weicht von $a_1 u^2$ ab um

$$a_{n+2} \frac{\varphi(2^{2n+4})}{2^{n(2n+4)}} u^{2n+4} + a_{n+3} \frac{\varphi(2^{2n+6})}{2^{n(2n+6)}} u^{2n+6} + \cdots$$

oder in anderer Form um

$$\frac{1}{(1 - 2^2)(1 - 2^4)\cdots(1 - 2^{2n})} \left[a_{n+2}\varepsilon_1 u^{2n+4} + a_{n+3}\varepsilon_2 u^{2n+6} + \cdots\right]$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ dieselbe Bedeutung haben wie oben. Bezeichnet wieder r die Summe der absoluten Beträge von $a_{n+2}u^{2n+4}$, $a_{n+3}u^{2n+6}$ u. s. w. so ist die Abweichung des Näherungswerthes absolut genommen kleiner als

$$1{,}5 r 2^{-n(n+1)}.$$

Die Functionen $\varphi(x)$ für die beiden Fälle einer geraden und ungeraden Function $f(u)$ hängen in der folgenden Weise zusammen. Setzt man im ersteren Falle $2x$ statt x ein, so geht $\varphi(x)$ über in

$$\frac{2x - 2^4}{1 - 2^2} \frac{2x - 2^6}{1 - 2^4} \cdots \frac{2x - 2^{2n+2}}{1 - 2^{2n}},$$

und hebt man hier aus jedem Factor des Zählers 2 heraus, so geht der

Ausdruck in die Function $\varphi(x)$ für den Fall einer ungeraden Function $f(u)$ über. Für diesen Fall haben wir

$$n = 1 \qquad 3\varphi(x) = 8 - x,$$

$$n = 2 \qquad 45\varphi(x) = 256 - 40x + x^2,$$

$$n = 3 \qquad 2835\varphi(x) = 32768 - 5376x + 168x^2 - x^3,$$

$$n = 4 \qquad 722925\varphi(x) = 16777216 - 2785280x + 91392x^2 - 680x^3 + x^4.$$

Für den Fall einer geraden Function $f(u)$ hat man

$$n = 1 \qquad 3\varphi(x) = 16 - x,$$

$$n = 2 \qquad 45\varphi(x) = 1024 - 80x + x^2,$$

$$n = 3 \qquad 2835\varphi(x) = 262144 - 21504x + 336x^2 - x^3,$$

$$n = 4 \qquad 722925\varphi(x) = 268435456 - 22282240x + 365568x^2 - 1360x^3 + x^4.$$

Die Genauigkeit, mit welcher die Werthe von $f(u)$, $f\left(\frac{u}{2}\right)$ u. s. w. in die Rechnung eingeführt werden, muss, wie schon oben bei dem numerischen Beispiele bemerkt wurde, grösser sein, als die Genauigkeit, mit der man den Näherungswerth zu berechnen beabsichtigt. Denn der Fehler von $f(u)$ multiplicirt sich mit C_n, der von $f\left(\frac{u}{2}\right)$ mit C_{n-1} u. s. w. Sind die Fehler von $f(u)$, $f\left(\frac{u}{2}\right)$ u. s. w. alle kleiner als δ, so ist der Fehler in der Summe kleiner als δ multiplicirt mit der Summe der absoluten Beträge von $C_0, C_1, \ldots, C_n$, d. i. kleiner als $\delta\varphi(-1)$. Es ist nun, wenn in $f(u)$ alle Potenzen von u vorkommen

$$\varphi(-1) = \frac{(2^2+1)(2^3+1)\ldots(2^{n+1}+1)}{(2-1)(2^2-1)\ldots(2^n-1)} < 2^{n+3},$$

wenn $f(u)$ ungerade

$$\varphi(-1) = \frac{(2^3+1)(2^5+1)\ldots(2^{2n+1}+1)}{(2^2-1)(2^4-1)\ldots(2^{2n}-1)} < 2^{n+1},$$

und wenn $f(u)$ gerade

$$\varphi(-1) = \frac{(2^4+1)(2^6+1)\ldots(2^{2n+2}+1)}{(2^2-1)(2^4-1)\ldots(2^{2n}-1)} < 1{,}7\cdot 2^{2n}.$$

Darnach kann man für jeden Fall überschlagen, mit wie viel Decimalen es genügt $f(u)$, $f\left(\frac{u}{2}\right)$ u. s. w. in die Rechnung einzuführen, wenn man bei allen mit der gleichen Anzahl von Decimalen rechnen will.

Für ungerade und gerade Functionen soll die Methode an einigen Beispielen durchgeführt werden.

1. *Berechnung von* arc sin x *und* arc cos x.

Man kann sich offenbar auf den Fall beschränken, wo der Bogen nicht grösser als $\frac{\pi}{4}$ ist. Dann ist z. B. für $n = 2$ beim Sinus $r < 0{,}4 \cdot 10^{-5}$ beim Cosinus $r < 0{,}4 \cdot 10^{-6}$. Mithin ist für $n = 2$ der Näherungswerth für arc sin bis auf 10^{-7} genau und der Näherungswerth für das halbe Quadrat von arc cos bis auf 10^{-8}. Mit dieser Genauigkeit ist also

$$45u = 256 \sin\frac{u}{4} - 40 \sin\frac{u}{2} + \sin u,$$

$$45\frac{u^2}{2} = 1024\left(1 - \cos\frac{u}{4}\right) - 80\left(1 - \cos\frac{u}{2}\right) + (1 - \cos u).$$

Die zweite Formel ist vorzuziehn, weil sie erstens etwas genauer ist und zweitens, wenn $\cos u$ gegeben ist, nur 3 Quadratwurzeln auszuziehn verlangt. Rechnet man mit 9 Decimalen, so wird der Näherungswerth von $\frac{u^2}{2}$ mit einer Genauigkeit von 1,4 Einheiten der 8ten Stelle gefunden also $\frac{u^2}{2}$ selbst auf 2,4 Einheiten der 8ten Stelle. So findet man z. B. für $\sin u = 0{,}5$

$$\sin u = 0{,}5 \qquad \cos u = 0{,}866025404$$

$$\cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}} = 0{,}965925826$$

$$\cos\frac{u}{4} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{u}{2}}{2}} = 0{,}991444861$$

$$\frac{u^2}{2} = 0{,}137077845, \qquad u = 0{,}523598786$$

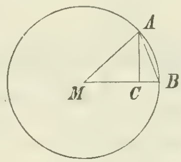
während der wahre Werth $\frac{\pi}{6}$ auf neun Decimalen abgekürzt gleich

$$0,523598776$$

ist. Auch für $n = 1$ ist die Genauigkeit nicht unbedeutend. Für $u = \frac{\pi}{4}$ hat man für den Sinus $1,5r2^{n(n+1)} < 10^{-3}$ und für den Cosinus

$$1,5r2^{n(n+1)} < 1,4 . 10^{-4}.$$

Die relative Genauigkeit (Abweichung im Verhältniss zu u) ist für den Sinus kleiner als $1,3 . 10^{-3}$ für den Cosinus kleiner als $1,8 . 10^{-4}$. Die Formel für den Sinus liefert eine einfache graphische Rectification des Kreisbogens. Ist nämlich $\angle AMB = u$, so ist $AC = \sin u$, $AB = 2 \sin\frac{u}{2}$, vorausgesetzt, dass der Radius zur Längeneinheit gemacht ist. Der Näherungswerth ist dann $\frac{1}{3}(4AB - AC)$ oder $AB + \frac{1}{3}(AB - AC)$.



Archimedes fand aus dem Umfang des eingeschriebenen und umschriebenen 96-Ecks für π die Grenzen $3^1/_7$ und $3^{10}/_{71}$, welche bis auf 2 Einheiten der vierten Stelle genau sind. Mit Benutzung der abgeleiteten Formel für $n = 4$ würde man aus den Seiten des 6-, 12-, 24-, 48-, 96-Ecks die Zahl $\frac{\pi}{6}$ mit der Genauigkeit

$$1,5\left(\frac{\pi}{6}\right)^{11} \frac{1}{|\underline{11}} 2^{-20} < 3 . 10^{-17}.$$

berechnen können.

2. *Berechnung der Argumente des hyperbolischen Sinus und des hyperbolischen Cosinus.*

Die Genauigkeit ist dieselbe wie die für Sinus und Cosinus berechnete, da die absoluten Beträge der Glieder in den Potenzreihen für den trigonometrischen und den hyperbolischen Sinus und ebenso in denen für den Cosinus dieselben sind. Die Formel für den Cosinus ist auch hier im Allgemeinen vorzuziehn.

Wenn das Argument gross ist, so thut man besser statt der Formel für n, die Formel für $n - 1$ aber mit $f\left(\frac{u}{2}\right) f\left(\frac{u}{2^2}\right) \cdots f\left(\frac{u}{2^n}\right)$ zu benutzen.

Es ist nämlich die Genauigkeitsgrenze für $\frac{u^2}{2}$ etwa gleich

$$1,5 \frac{u^{2n+4}}{\underline{|2n+4}} 2^{-n(n+1)}.$$

Wendet man dagegen die vorhergehende Formel für $n - 1$ auf $f\left(\frac{u}{2}\right)$ an, so ist die Genauigkeitsgrenze etwa

$$4 \frac{1,5}{\underline{|2n+2}} \left(\frac{u}{2}\right)^{2n+2} 2^{-(n-1)n} = 1,5 \frac{u^{2n+2}}{\underline{|2n+2}} 2^{-n(n+1)}.$$

Die obige Genauigkeitsgrenze geht aus dieser durch Multiplication mit $\frac{u^2}{(2n+3)(2n+4)}$ hervor. Wenn also $u^2 > (2n+3)(2n+4)$ so ist die letztere kleiner. Sei z. B. $\cos_h u = 10$, dann ist:

$$\cos_h \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos_h u}{2}} = 2,345207880,$$

$$\cos_h \frac{u}{4} = 1,293291901,$$

$$\cos_h \frac{u}{8} = 1,070815554,$$

$$\cos_h \frac{u}{16} = 1,017549889.$$

Die Formel $n = 3$ auf die letzten vier Zahlen angewandt liefert:

$$u = 2,99322282.$$

Die Abweichung des Näherungswerthes für $\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2$ ist etwa $1,2 \cdot 10^{-8}$, aber da mit 9 Decimalen gerechnet ist, so könnte ein Fehler von 6 Einheiten der 8ten Stelle hinzukommen.

3. *Berechnung eines elliptischen Integrals erster Gattung.*

Sei

$$u = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \text{wo} \quad k = \sin 75^\circ = 0{,}96592583,$$

so hat man

$$x = \operatorname{sn} u, \qquad x_1 = \operatorname{sn}\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-k^2}}} = 0{,}88566098,$$

$$x_2 = \operatorname{sn}\frac{u}{4} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_1^2}}{1+\sqrt{1-k^2x_1^2}}} = 0{,}60188393,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_3 = 0{,}33325174,$$

$$x_4 = 0{,}17135481,$$

$$x_5 = 0{,}08629406.$$

Wendet man auf die letzten 4 Zahlen die Formel $n = 3$ für eine ungerade Function an, so ergiebt sich $u = 2{,}76806308$, was bis auf weniger als 7 Einheiten der letzten Stelle richtig ist. Die mögliche Abweichung des Resultats in Folge der Abkürzung aller Zahlen auf 8 Decimalen beträgt 3 Einheiten der siebenten Stelle.

Man erleichtert das Verfahren und erreicht eine schnellere Convergenz, wenn man statt $\operatorname{sn} u$ die Functionen $\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$ und $\frac{1}{\operatorname{dn} u}$ der Rechnung zu Grunde legt. Zur Abkürzung werde geschrieben:

$$f(u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad g(u) = \frac{1}{\operatorname{dn} u}.$$

Dann ist:

$$f\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{f(u)+g(u)}{1+g(u)}}, \qquad g\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{f(u)+g(u)}{1+f(u)}}.$$

Man findet also aus $f(u)$ und $g(u)$ durch zwei Quadratwurzelausziehungen

$f\left(\frac{u}{2}\right)$ und $g\left(\frac{u}{2}\right)$. Wiederholt man diese Rechnung einige Male, so kann die oben entwickelte Formel sowohl auf $f(u)$ als auf $g(u)$ angewendet werden. Die Entwicklungen von $f(u)$ und $g(u)$ fangen folgendermassen an:

$$f(u) = 1 - \frac{k'^2}{2} u^2 + \ldots,$$

$$g(u) = 1 + \frac{k^2}{2} u^2 + \ldots.$$

Man erhält also durch Anwendung der Formel auf $f(u)$ einen Näherungswerth von $-\frac{k'^2}{2} u^2$ und durch Anwendung derselben auf $g(u)$ einen solchen von $\frac{k^2}{2} u^2$. Was die Genauigkeit des Verfahrens betrifft, so wurde oben dafür der Ausdruck

$$1{,}5\, r\, 2^{-n(n+1)}$$

aufgestellt, wo r die Summe der absoluten Beträge von $a_{n+2} u^{2n+4}$, $a_{n+3} u^{2n+6}, \ldots$ der Glieder in der Entwicklung von $f(u)$ resp. $g(u)$ bedeutet. Es kommt also darauf an für r eine obere Grenze zu finden. $f(u)$ und $g(u)$ werden beide nur an den Stellen

$$u = K + K'i + 2mK + 2nK'i$$

unendlich und die Entwicklungen nach Potenzen von u convergiren daher beide für $|u| < |K + K'i|$ und a fortiori für $u = \frac{K}{2}$ und $u = \frac{K'}{2}$. Bezeichnet nun m den grössten Werth der absoluten Beträge einer der Potenzreihen, welche dieselbe für $|u| = \frac{K}{2}$ annimmt, so ist bekanntlich[1]

$$\left(\frac{K}{2}\right)^{2\lambda} |a_\lambda| < m$$

und mithin für $|u| < \frac{K}{2}$

$$r < m \frac{K^2}{K^2 - 4|u|^2} \left|\frac{2u}{K}\right|^{2n+4}.$$

[1] Der Beweis ist unmittelbar aus dem Cauchy'schen Integral $f^{(n)}(0) = \frac{|n}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ zu entnehmen.

Ebenso folgt, wenn m' der grösste absolute Betrag für $|u| = \frac{K'}{2}$ ist, für $|u| < \frac{K'}{2}$:

$$r < m' \frac{K'^2}{K'^2 - 4|u|^2} \left|\frac{2u}{K'}\right|^{2n+1}.$$

Der grösste absolute Betrag, welchen eine analytische Function in einem Gebiet annimmt, in dem sie sich regulär verhält, wird immer auf dem Rande des Gebietes angenommen. Wenn daher um den Kreis mit dem Radius $\frac{K}{2}$ resp. $\frac{K'}{2}$ ein anderes Gebiet abgegrenzt wird, welches den Kreis einschliesst, so wird der grösste absolute Betrag auf dem Rande desselben statt m resp. m' in dem Ausdruck für die obere Grenze von r geschrieben werden können.

Dieses Gebiet lässt sich so wählen, dass der grösste absolute Betrag von $f(u)$ resp. $g(u)$ auf dem Rande desselben angegeben werden kann. Für den Kreis mit dem Radius $\frac{K}{2}$ grenze man das Gebiet folgendermaassen ab. Es sei dasselbe ein Rechteck, dessen verticale Seiten in die beiden parallel zur y Achse durch $\pm\frac{K}{2}$ gezogenen Geraden fallen. Die horizontalen Seiten sollen durch $\pm\, 2nK'i$ laufen, wo n eine ganze Zahl und so gross gewählt ist, dass $2nK' > \frac{K}{2}$. Das Gebiet, welches den Kreis mit dem Radius $\frac{K'}{2}$ enthält, soll ein Rechteck sein, dessen horizontale Seiten in die beiden parallel zur x Achse durch $\pm\frac{K'i}{2}$ gezogenen Geraden fällt und dessen verticale Seiten durch $\pm\, 2n'K$ laufen, wo n' eine ganze Zahl und so gross gewählt ist, dass $2n'K > \frac{K'}{2}$. Die grössten absoluten Beträge von $f(u)$ und $g(u)$ auf dem Rande dieser Gebiete, findet man durch Anwendung der Formeln für $f^2\left(\frac{u}{2}\right)$ und $g^2\left(\frac{u}{2}\right)$:

$$f^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{f(u) + g(u)}{1 + g(u)} = \frac{\operatorname{cn} u + 1}{\operatorname{dn} u + 1}, \qquad g^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{f(u) + g(u)}{1 + f(u)} = \frac{\operatorname{cn} u + 1}{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}.$$

Wenn $\frac{u}{2}$ den Rand der beiden Gebiete durchläuft, so nimmt u solche

Werthe an, für welche die Werthe von $\operatorname{cn} u$ und $\operatorname{dn} u$ bekannt sind, und man überzeugt sich von der Richtigkeit der folgenden kleinen Tabelle:

	m	m'
$f(u)$	$(1-k')^{-\frac{1}{2}}$	$k^{-\frac{1}{2}}$
$g(u)$	$k'^{-\frac{1}{2}}$	$(1-k)^{-\frac{1}{2}}$

Man erhält demnach bei der Rechnung mit $f(u)$ für u^2 einen Näherungswerth, dessen Fehler kleiner als jede der beiden folgenden Grössen:

$$3k'^{-2}(1-k')^{-\frac{1}{2}}K^2(K^2-4u^2)^{-1}\left(\frac{2u}{K}\right)^{2n+4}2^{-n(n+1)}$$

und

$$3k'^{-2}k^{-\frac{1}{2}}K'^2(K'^2-4u^2)^{-1}\left(\frac{2u}{K'}\right)^{2n+4}2^{-n(n+1)}.$$

Bei der Rechnung mit $g(u)$ ist der Fehler kleiner als:

$$3k^{-2}k'^{-\frac{1}{2}}K^2(K^2-4u^2)^{-1}\left(\frac{2u}{K}\right)^{2n+4}2^{-n(n+1)}$$

und

$$3k^{-2}(1-k)^{-\frac{1}{2}}K'^2(K'^2-4u^2)^{-1}\left(\frac{2u}{K'}\right)^{2n+4}2^{-n(n+1)}.$$

Man ersieht aus diesen Ausdrücken, dass für $k < k'$ und mithin $K < K'$ die Rechnung mit $f(u)$ die grössere Genauigkeit gewährt, für $k > k'$ und mithin $K > K'$ dagegen die Rechnung mit $g(u)$. Ist jedes Mal u kleiner als der 4te Theil der grösseren von den beiden Grössen K und K', so ist der Fehler des Näherungswerthes von u^2 für $k < k'$ und bei der Rechnung mit $f(u)$ kleiner als

$$k'^{-2}k^{-\frac{1}{2}}2^{-(n+1)(n+2)}$$

für $k' < k$ und bei der Rechnung mit $g(u)$ kleiner als

$$k^{-2}k'^{-\frac{1}{2}}2^{-(n+1)(n+2)}.$$

Will man z. B. K berechnen und ist $k > k'$ so findet man beim ersten Schritt aus $f(K) = 0$, $g(K) = \frac{1}{k'}$, die Werthe von $f\left(\frac{K}{2}\right)$ und $g\left(\frac{K}{2}\right)$, beim zweiten Schritt $f\left(\frac{K}{4}\right)$ und $g\left(\frac{K}{4}\right)$.

Wenn man jetzt noch 3 weitere Schritte macht und die Formel für $n = 3$ auf $g(u)$ anwendet, so wird $\frac{K}{4}$ mit der Genauigkeitsgrenze gefunden:

$$k^{-2}k'^{-\frac{1}{2}}2^{-20} < 1{,}05k^{-2}k'^{-\frac{1}{2}}.10^{-6}.$$

Bei $n = 4$ ergiebt sich die Genauigkeitsgrenze

$$k^{-2}k'^{-\frac{1}{2}}2^{-34} < 1{,}1k^{-2}k'^{-\frac{1}{2}}10^{-9}.$$

So findet man z. B., wenn man

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \quad k^2 = 0{,}933012701$$

berechnen will

n	$f\left(\frac{K}{2^n}\right)$	$g\left(\frac{K}{2^n}\right)$
0	0	3,863703279
1	0,891288591	1,965630504
2	0,981500332	1,229051488
3	0,995841682	1,056217296
4	0,998988331	1,013985805
5		1,003492123

Die vier letzten Zahlen der zweiten Colonne liefern:

$$K = 2{,}76806309.$$

Dieser Werth ist etwa um 6 Einheiten der 8^{ten} Stelle zu klein. Die oben aufgestellte Genauigkeitsgrenze ergiebt für $\frac{K^2}{4}$

$$2{,}2 . 10^{-6},$$

also für K^2

$$8{,}8 . 10^{-6}.$$

Dazu könnte wegen der Vernachlässigung der zehnten Stelle und der folgenden ein Fehler von etwa 2 Einheiten der 7^{ten} Stelle kommen. K selbst wird also jedenfalls auf $1{,}7 . 10^{-6}$ richtig sein.

Wenn eine Rechenmaschine nicht zur Verfügung steht, so kann man die Rechnung auch mit Hilfe einer logarithmisch-trigonometrischen Tafel auf die folgende Weise ausführen:

Setzt man:

$$\operatorname{sn} u = \sin \varphi, \qquad k \operatorname{sn} u = \sin \gamma$$

so ist:

$$\operatorname{cn} u = \cos \varphi, \qquad \operatorname{dn} u = \cos \gamma.$$

Berechnet man zwei neue Winkel φ_1 und γ_1 aus den Gleichungen:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \gamma} = \sin \varphi_1, \qquad k \sin \varphi_1 = \sin \gamma_1$$

so ist:

$$\operatorname{sn} \frac{u}{2} = \sin \varphi_1, \qquad \operatorname{cn} \frac{u}{2} = \cos \varphi_1, \qquad \operatorname{dn} \frac{u}{2} = \cos \gamma_1.$$

Auf diese Weise kann man fortfahren und $f\left(\frac{u}{2^n}\right)$ und $g\left(\frac{u}{2^n}\right)$ oder vielmehr die Logarithmen dieser Grössen finden. Denn nur diese braucht man bei der Anwendung der aufgestellten Formel. Wenn u rein imaginär ist, so muss man andere trigonometrische Hilfsfunctionen einführen.

Man setze:

$$\operatorname{sn} u = i \tan \varphi, \qquad k' \sin \varphi = \sin \gamma,$$

so ist:

$$\operatorname{cn} u = \frac{1}{\cos \varphi}, \qquad \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} = \cos \gamma.$$

Berechnet man zwei neue Winkel φ_1 und γ_1 durch die Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \sin\varphi_1, \qquad k'\sin\varphi_1 = \sin\gamma_1,$$

so ist:

$$\operatorname{sn}\frac{u}{2} = i\tan\varphi_1, \qquad \operatorname{cn}\frac{u}{2} = \frac{1}{\cos\varphi_1}, \qquad \frac{\operatorname{dn}\frac{u}{2}}{\operatorname{cn}\frac{u}{2}} = \cos\gamma_1.$$

Es ist bei der logarithmischen Rechnung vortheilhafter statt einer der Functionen $f(u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$ oder $g(u) = \frac{1}{\operatorname{dn} u}$ die ungrade Function $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$ zu Grunde zu legen. Man braucht alsdann $\operatorname{cn} u$ gar nicht mit zu berechnen. Die Berechnung ist ebenso bequem wie die von $f(u)$ und $g(u)$. Die Genauigkeit ist, wie wir sogleich sehn werden ungefähr dieselbe. Ein wesentlicher Vortheil aber liegt darin, dass diese Function für kleine Argumente klein ist. Bei der Rechnung mit n-stelligen Logarithmen ist der Fehler in Folge der Vernachlässigung der $n + 1^{\text{ten}}$ und der weiteren Stellen etwa 10^{-n} des Betrages der Zahl. Wenn also die Zahl eine negative Charakteristik hat, so bestimmt der Logarithmus sie weiter als bis zur n^{ten} Decimale. Ein Beispiel wird den Vortheil am Besten zeigen. Vorher soll aber noch eine Genauigkeitsgrenze für die Rechnung mit $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$ aufgestellt werden.

Der grösste absolute Betrag von $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$ auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{K}{2}$ ergiebt sich auf dem oben auseinandergesetzten Wege nicht grösser als $k^{-1}k'^{-\frac{1}{2}}(1 + k')^{\frac{1}{2}}$, auf einem Kreis mit dem Radius $\frac{K'}{2}$ nicht grösser als $k'^{-1}k^{-\frac{1}{2}}(1 + k)^{\frac{1}{2}}$. Daraus folgt ganz ähnlich wie oben für das Verfahren die Genauigkeitsgrenze:

$$1.5\,k^{-1}k'^{-\frac{1}{2}}(1 + k')^{\frac{1}{2}}\,\frac{K^2}{K^2 - 4|u|^2}\left|\frac{2u}{K}\right|^{2n+4} 2^{-n(n+1)}$$

oder auch

$$1{,}5k'^{-1}k^{-\frac{1}{2}}(1+k)^{\frac{1}{2}}\frac{K'^2}{K'^2-4|u|^2}\left|\frac{2u}{K'}\right|^{2n+4}2^{-n(n+1)}.$$

Hierbei ist $|u|<\frac{K}{2}$ resp. $|u|<\frac{K'}{2}$ vorausgesetzt. Wird $|u|$ nicht grösser als der vierte Theil von K resp. K' angenommen, so ist die Genauigkeitsgrenze

$$k^{-1}k'^{-\frac{1}{2}}(1+k')^{\frac{1}{2}}2^{-(n+1)(n+2)-1} \quad \text{resp.} \quad k'^{-1}k^{-\frac{1}{2}}(1+k)^{\frac{1}{2}}2^{-(n+1)(n+2)-1}.$$

Sei z. B.

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad k=\sin 75^\circ$$

zu berechnen, so findet man

n	$\log\sin\varphi_r$	$\log\cos\gamma_r$	φ_r	γ_r
0	0,0000000		90°	75°
1	9,9500183		63° 2′ 8,2″	59° 25′ 11,6″
2	9,7795127	9,9104299	37° 0′ 17,8″	35° 32′ 50,4″
3	9,5227724	9,9762467	19° 27′ 58,55″	18° 46′ 39,55″
4	9,2338962	9,9939681	9° 51′ 59,76″	9° 31′ 37,96″
5	8,9359809	9,9984860		4° 46′ 52,9″

Nun berechnet man den Ausdruck der oben abgeleiteten Formel

$$\frac{32768}{2835}\frac{\sin\varphi_5}{\cos\gamma_5}-\frac{5376}{2835}\frac{\sin\varphi_4}{\cos\gamma_4}+\frac{168}{2835}\frac{\sin\varphi_3}{\cos\gamma_3}-\frac{1}{2835}\frac{\sin\varphi_2}{\cos\gamma_2},$$

in welcher man die Logarithmen der Coefficienten aus einer ein für alle Mal berechneten Tabelle entnehmen kann. Der Ausdruck ist ein Näherungswerth für den vierten Theil des Integrales. Er ergiebt sich gleich 0,6920154 mit der Genauigkeitsgrenze $1{,}2 \cdot 10^{-6}$. Hierzu kann ein Fehler kommen durch den Gebrauch siebenstelliger Logarithmen. Wir

können annehmen, dass sich $\log \sin \varphi$ und $\log \cos \gamma$ bis auf eine Einheit der siebenten Stelle genau ergeben. Die Logarithmen der Producte von $\frac{\sin \varphi_r}{\cos \gamma_r}$ in den betreffenden Coefficienten, werden alsdann bis auf 2,5 Einheiten der 7^{ten} Stelle sicher sein, die zugehörigen Zahlen also etwa auf $6 . 10^{-7}$ ihres Betrages. Das macht in dem gegebenen Falle höchstens etwa 8 Einheiten der 7^{ten} Stelle aus. Der gefundene Näherungswerth muss also weniger als $2 . 10^{-6}$ von dem wahren Werth abweichen. In der That ist er bis auf etwa 4 Einheiten der 7^{ten} Stelle richtig.

Es muss zugegeben werden, dass die Berechnung der Perioden schneller mit Hilfe der Thetafunctionen ausgeführt werden kann, indem man die Theilung einer Periode durch 4 benutzt, besonders dann, wenn beide Perioden doch berechnet werden müssen.

Wenn aber nur eine Periode zu berechnen ist, oder wenn nur ein Werth des Integrals für besondere Grenzen gefunden werden soll, oder endlich wenn die Perioden bereits bekannt sind, so mag das auseinandergesetzte Verfahren wohl am schnellsten zum Ziele führen. Für die Ausführung mit Logarithmen seien hier noch für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ die Logarithmen der Multiplicatoren auf sieben Stellen angegeben.

n	C_0	$-C_1$	C_2	$-C_3$	C_4
1	0,4259687	9,5228787			
2	0,7550275	9,9488475	8,3467875		
3	1,0628969	0,2779062	8,7727562	6,5474470	
4	1,3656267	0,5857756	9,1018150	6,9734157	4,1409068
1	0,7269987	9,5228787			
2	1,3570874	0,2498775	8,3467875		
3	1,9659869	0,8799662	9,0737862	6,5474470	
4	2,5697467	1,4888656	9,7038750	7,2744457	4,1409068

Bei den Logarithmen, welche die Charakteristik 4, 6, 7, 8, 9 haben, ist

— 10 zu ergänzen. Diese Werthe werden für die meisten practischen Zwecke ausreichen.

Um aber auch den Gebrauch grösserer Werthe von n zu ermöglichen, sollen die Coefficienten für ein beliebiges n angegeben werden. Die Entwickelung der Functionen $\varphi(x)$ ist enthalten in der von Euler gegebenen Entwickelung von

$$(1 + az)(1 + a^2 z) \dots (1 + a^n z).$$

Bezeichnet man dieses Product mit $P_n(a, z)$, so hat man in Folge der Definition die beiden Gleichungen:

$$(1 + az) P_n(a, az) = P_{n+1}(a, z),$$
$$(1 + a^{n+1} z) P_n(a, z) = P_{n+1}(a, z),$$

folglich

$$(1 + az) P_n(a, az) = (1 + a^{n+1} z) P_n(a, z).$$

Bedeutet $f_\alpha(a)$ den Coefficienten von z^α in der Entwickelung von $P_n(a, z)$ nach Potenzen von z, so folgt aus der Vergleichung der Coefficienten von z^α $(\alpha = 1, 2, \dots, n)$

$$f_\alpha(a) a^\alpha + f_{\alpha-1}(a) a^\alpha = f_\alpha(a) + f_{\alpha-1}(a) a^{n+1}$$

oder

$$f_\alpha(a)(a^\alpha - 1) = f_{\alpha-1}(a)(a^{n+1} - a^\alpha),$$

Da $f_0(a) = 1$ und $f_n(a) = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$, so folgt:

$$f_\alpha(a) = \frac{a^{n+1} - a^\alpha}{a^\alpha - 1} f_{\alpha-1}(a) = \frac{a^{n+1} - a^\alpha}{a^\alpha - 1} \frac{a^{n+1} - a^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1} - 1} f_{\alpha-2}(a) = \dots$$
$$= \frac{a^{n+1} - a^\alpha}{a^\alpha - 1} \frac{a^{n+1} - a^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1} - 1} \cdots \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \frac{a^{n-1} - 1}{a^2 - 1} \cdots \frac{a^{n-\alpha+1} - 1}{a^\alpha - 1} a^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}},$$

oder auch

$$f_\alpha(a) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a^{n+1} - a^{\alpha+1}} f_{\alpha+1}(a) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a^{n+1} - a^{\alpha+1}} \frac{a^{\alpha+2} - 1}{a^{n+1} - a^{\alpha+2}} f_{\alpha+2}(a) = \dots$$
$$= \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a^{n+1} - a^{\alpha+1}} \frac{a^{\alpha+2} - 1}{a^{n+1} - a^{\alpha+2}} \cdots \frac{a^n - 1}{a^{n+1} - a^n} a^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \frac{a^{n-1} - 1}{a^2 - 1} \cdots \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a^{n-\alpha} - 1} a^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}.$$

Für die Functionen $\varphi(x)$ wurden nun oben die folgenden Ausdrücke gefunden. Im ersten Fall, wo in der Entwicklung der Function $f(u)$ alle Potenzen vertreten waren, ergab sich

$$\varphi(x) = \frac{x - 2^2}{1 - 2}\,\frac{x - 2^3}{1 - 2^2}\cdots\frac{x - 2^{n+1}}{1 - 2^n}$$

im zweiten Falle, wo $f(u)$ nur ungerade Potenzen enthielt

$$\varphi(x) = \frac{x - 2^3}{1 - 2^2}\,\frac{x - 2^5}{1 - 2^4}\cdots\frac{x - 2^{2n+1}}{1 - 2^{2n}}$$

endlich im dritten Falle, wo in der Entwickelung nur gerade Potenzen vorkamen:

$$\varphi(x) = \frac{x - 2^4}{1 - 2^2}\,\frac{x - 2^6}{1 - 2^4}\cdots\frac{x - 2^{2n+2}}{1 - 2^{2n}}.$$

Alle drei Functionen lassen sich durch $P_n(a\,,\,z)$ ausdrücken.

Es ist im ersten Falle:

$$\varphi(x) = x^n\,\frac{P_n(2\,,\,-2x^{-1})}{P_n(2\,,\,-1)}$$

im zweiten Falle:

$$\varphi(x) = x^n\,\frac{P_n(4\,,\,-2x^{-1})}{P_n(4\,,\,-1)}$$

im dritten Falle:

$$\varphi(x) = x^n\,\frac{P_n(4\,,\,-4x^{-1})}{P_n(4\,,\,-1)}.$$

Darnach ist im ersten Falle:

$$C_{n-a} = (-1)^{n-a}\,\frac{2^{-\frac{(n-a)(n-a+1)}{2}+a}}{(1-2^{-1})(1-2^{-2})\dots(1-2^{-a})(1-2^{-1})(1-2^{-2})\dots(1-2^{-n+a})},$$

im zweiten Falle:

$$C_{n-a} = (-1)^{n-a}\,\frac{4^{-\frac{(n-a)(n-a+1)}{2}}\cdot 2^a}{(1-4^{-1})(1-4^{-2})\dots(1-4^{-a})(1-4^{-1})(1-4^{-2})\dots(1-4^{-n+a})},$$

im dritten Falle:

$$C_{n-a} = (-1)^{n-a}\,\frac{4^{-\frac{(n-a)(n-a+1)}{2}+a}}{(1-4^{-1})(1-4^{-2})\dots(1-4^{-a})(1-4^{-1})(1-4^{-2})\dots(1-4^{-n+a})}.$$

Jedes Mal haben $C_{n-\alpha}$ und C_α denselben Nenner und können sich nur durch das Vorzeichen und die Potenz von 2 resp. 4 im Zähler unterscheiden.

Zur Berechnung der Zahlen

$$\frac{1}{(1-2^{-1})(1-2^{-2})\dots(1-2^{-\alpha})} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{(1-4^{-1})(1-4^{-2})\dots(1-4^{-\alpha})}$$

welche in den Ausdrücken für die Grössen C vorkommen, kann man für grössere Werthe von α die von Euler gegebene Entwickelung benutzen:

$$\prod_{k=1,2,\dots,\infty}(1-a^k) = \sum_{k=-\infty\dots+\infty}(-1)^k a^{\frac{3k^2+k}{2}}.$$

Es ist:

$$\frac{1}{(1-a)(1-a^2)\dots(a-a^\alpha)} = \frac{(1-a^{\alpha+1})(1-a^{\alpha+2})\dots}{(1-a)(1-a^2)\dots}$$

$$= \frac{(1-a^{\alpha+1})(1-a^{\alpha+2})\dots}{\sum(-1)^k a^{\frac{3k^2+k}{2}}}.$$

Der Zähler kann auch in eine bequem zu berechnende Reihe entwickelt werden mit Hilfe der ebenfalls von Euler gegebenen Formel

$$(1+xz)(1+x^2z)\dots \text{ in inf. } = \sum \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} z^n.$$

Setzt man $z = -a^\alpha$, $x = a$, so ergiebt sich der Zähler des obigen Ausdruckes gleich

$$1 - \frac{a^{\alpha+1}}{1-a} + \frac{a^{2\alpha+3}}{(1-a)(1-a^2)} - \frac{a^{3\alpha+6}}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \dots.$$

Für $a = \frac{1}{4}$ ist

$$\sum(-1)^k a^{\frac{3k^2+k}{2}} = 1 - a - a^2 + a^5 + a^7 - a^{12} - a^{15}$$

bis auf einen Fehler von weniger als 10^{-13}.

Es ergiebt sich:

$$\sum(-1)^k a^{\frac{3k^2+k}{2}} \doteq 0{,}688537537 1203.$$

Nun berechne man direct

$$\frac{1}{1-a},\ \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-a^2},\ \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-a^2}\frac{1}{1-a^3}.$$

Für $\alpha = 4$ werden die vier Glieder

$$1-\frac{a^{\alpha+1}}{1-a}+\frac{a^{2\alpha+3}}{(1-a)(1-a^2)}-\frac{a^{3\alpha+6}}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}$$

den gesuchten Werth jenes Zählers schon bis auf 15 Stellen genau angeben. Für grössere Werthe von α werden noch weniger Glieder genügen.

Man erhält so für $\frac{1}{(1-a)(1-a^2)\dots(1-a^\alpha)}$ den folgenden Ausdruck, welcher für $\alpha \geqq 4$ den Werth auf 13 Decimalen angiebt

$$1{,}4523536424496-\frac{1{,}89108547194\,.\,10^{-3}}{4^{\alpha-4}}$$

$$+\frac{4{,}924702\,.\,10^{-7}}{4^{2(\alpha-4)}}-\frac{3{,}053\,.\,10^{-11}}{4^{3(\alpha-4)}}.$$

NACHSCHRIFT.

Wie Herr Phragmén mir mittheilt ist die oben vorgeschlagene Modification des Verfahrens von Archimedes, was die Berechnung von π betrifft, bereits bekannt und in dem Lehrbuch von Saigey: *Problèmes d'Arithmétique* (Paris 1859), auseinandergesetzt worden. Es ist mir nicht möglich gewesen, dieses Buch einzusehn und ich habe nicht verfolgen können, wer der Urheber des Verfahrens ist, und wie weit es ausser zur Berechnung von π noch angewendet worden.

C. R.

ÜBER DIE GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER FLÄCHENTHEORETISCHEN FUNDAMENTALGLEICHUNGEN

VON

J. KNOBLAUCH
in BERLIN.

1. Die drei Gleichungen, welche zwischen den sechs Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung einer Fläche stattfinden, haben folgende Form:

$$
(1)\quad \begin{aligned}
\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\Bigg|&\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{1}{2}F\frac{\partial\log\frac{G}{E}}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{1}{2}F\frac{\partial\log\frac{E}{G}}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}\right)\Bigg|,
\end{aligned}
$$

$$
(2)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial v}+MJ_1+NJ_2-\left(\dfrac{\partial M}{\partial u}+LJ_1'+MJ_2'\right)=0,\\[2ex]
\dfrac{\partial N}{\partial u}+LJ_1''+MJ_2''-\left(\dfrac{\partial M}{\partial v}+MJ_1'+NJ_2'\right)=0.
\end{cases}
$$

Hierin bedeuten $J_1, \ldots, J_2''$ die sechs, aus den Grössen E, F, G und ihren partiellen Ableitungen gebildeten Christoffel'schen Verbindungen [Christoffel, Journ. f. Math. 70 (1869); vgl. *Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen* (Leipzig 1888), § 28, 65]. Man deutet die Formel (1) gewöhnlich als den Satz von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmasses bei allen Biegungen einer Fläche. Allein durch diesen Satz wird der Inhalt der Gauss'schen Relation nur unvollständig wiedergegeben; denn

er besagt blos, dass das Krümmungsmass K sich durch die Fundamentalgrössen erster Ordnung darstellen lässt, die Form der Abhängigkeit aber, d. h. der Ausdruck der Function auf der rechten Seite von (1), bleibt unberücksichtigt. Auch die Mehrzahl der mehr oder weniger eleganten Ausdrücke, welche seit Gauss für die Grösse K gegeben wurden, hilft diesem Mangel nicht ab. Denn sie sind meist algebraische Identitäten, während die durch die Gleichung (1) dargestellte Beziehung zwischen einer simultanen algebraischen Invariante zweier Differentialformen und der Gauss'schen Invariante einer von ihnen ihren Grund in den Bedingungen der Stetigkeit und Differentiirbarkeit hat, welchen die Cartesischen Coordinaten der Fläche unterworfen sind.

Von dem erwähnten Einwurf frei ist der Ausdruck des Krümmungsmasses, welchen O. Bonnet schon vor längerer Zeit angegeben hat [Journal de l'Ecole Polytechnique, Cah. 32 (1848), p. 54], welcher jedoch, vielleicht wegen der zu seiner Ableitung benutzten Methode, wenig bekannt geworden zu sein scheint. Es sei g_φ die geodätische Krümmung einer, auf der Fläche gezogenen Curve der Schaar $\varphi(u, v) = \text{const.}$, ferner $g_{\varphi\psi}$ die durch das Bogenelement der Linie $\psi(u, v) = \text{const.}$ dividirte Veränderung, welche g_φ beim Fortschreiten längs dieses Bogenelementes erfährt. Denkt man sich auf der Fläche irgend zwei orthogonale Curvenschaaren angenommen und wählt diese zu Coordinatenlinien, so geht (für $F = 0$) die Gleichung (1) über in

$$(3) \qquad K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right\}.$$

Nun ist für $F = 0$ ferner:

$$(4) \qquad g_u = -\frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad g_v = -\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v},$$

mithin folgt:

$$(5) \qquad \begin{cases} g_{uv} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial g_u}{\partial u} = g_u^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{EG}}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{EG}}\dfrac{\partial G}{\partial u}\right) \\[2ex] g_{vu} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial g_v}{\partial v} = g_v^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{EG}}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{EG}}\dfrac{\partial E}{\partial v}\right), \end{cases}$$

und durch Vergleichung mit (3):

$$(6) \qquad K = g_{uv} + g_{vu} - g_u^2 - g_v^2.$$

Dies ist der von Bonnet herrührende Wert, welcher in mannigfacher Weise modificirt werden könnte.

2. Ebenso wie die Gleichung (1), müssen auch die Formeln (2) Relationen zwischen geometrischen Grössen liefern, welche für jede Fläche Giltigkeit haben. Zur Deutung jener Gleichungen hat Bour, welcher bekanntlich in seiner Abhandlung über die Abwickelung der Flächen einen ausgedehnten Gebrauch von ihnen macht, einen Weg angegeben [Journal de l'École Polytechnique, Cah. 39 (1862)]. Allein abgesehen davon, dass die Verfolgung desselben nur für das specielle, von Bour benutzte System orthogonal-geodätischer Coordinaten verhältnismässig einfache Resultate ergibt, so würde sie auch die Hinzuziehung von Grössen nötig machen, welche bei sonstigen flächentheoretischen Untersuchungen von geringem Nutzen sind. Eine derartige Einführung wird vermieden, wenn man gleichzeitig mit der gegebenen Fläche auch ihre Krümmungsmittelpunktsfläche betrachtet. Mit den vier Hauptkrümmungsradien der Evolute (und den beiden Hauptkrümmungshalbmessern der Urfläche) steht jede andere geometrische Grösse, welche wie jene von den Differentialcoefficienten bis zur 3. Ordnung abhängt, notwendig in Beziehung. Es ist bei dem engen Zusammenhange, welcher zwischen Krümmungsmittelpunktsfläche und Krümmungslinien stattfindet, zweckmässig, die Krümmungen oder einfacher die geodätischen Krümmungen der letzteren in Rechnung zu ziehen. Die Fundamentalgleichungen (2) geben dann, wie leicht zu sehen, zwei Relationen zwischen diesen und den vorher genannten Grössen.

Bezeichnet man nämlich die, durch $EG - F^2$ dividirten linken Seiten der Formeln (2) mit α und β, ferner mit α' und β' die Ausdrücke, welche in analoger Weise unter Zugrundelegung eines zweiten Systems von Coordinaten p, q gebildet sind, so bestehen die Beziehungen:

$$\alpha = \alpha' \frac{\partial u}{\partial p} + \beta' \frac{\partial u}{\partial q}$$

$$\beta = \alpha' \frac{\partial v}{\partial p} + \beta' \frac{\partial v}{\partial q}$$

[Weingarten, Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin, 1884]. Sie lassen erkennen, inwiefern die Gleichungen $\alpha' = 0, \beta' = 0$

für das Verschwinden von α und β notwendig und hinreichend sind, und dass es mithin genügt, die Bedeutung der in Rede·stehenden Formeln für ein irgendwie specialisirtes Coordinatensystem anzugeben.

Nimmt man nun p und q als die Parameter der Krümmungslinien an, so wird

$$F = 0, \quad M = 0, \tag{7}$$

$$\begin{cases} J_2 = -\dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial E}{\partial q}, & J_1'' = -\dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial G}{\partial p}, \\ J_1' = \dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial E}{\partial q}, & J_2' = \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial p}, \end{cases} \tag{8}$$

und die Fundamentalgleichungen lassen sich bei Einführung der Hauptkrümmungsradien

$$\rho_1 = \frac{E}{L}, \qquad \rho_2 = \frac{G}{N}, \tag{9}$$

in die Form setzen:

$$\begin{cases} G\rho_1^2\alpha' \equiv \dfrac{\rho_1}{2}\left(1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)\dfrac{\partial \log E}{\partial q} - \dfrac{\partial \rho_1}{\partial q} = 0, \\ E\rho_2^2\beta' \equiv \dfrac{\rho_2}{2}\left(1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)\dfrac{\partial \log G}{\partial p} - \dfrac{\partial \rho_2}{\partial p} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Aus den Ausdrücken der Cartesischen Coordinaten

$$x_1 = x + \rho_1 X, \qquad y_1 = y + \rho_1 Y, \qquad z_1 = z + \rho_1 Z$$

für die, zu ρ_1 gehörige Schale der Evolute ergeben sich ferner mit Berücksichtigung von (7, 9) folgende Werte der Fundamentalgrössen 1. und 2. Ordnung:

$$E_1 = \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial p}\right)^2, \qquad F_1 = \frac{\partial \rho_1}{\partial p}\frac{\partial \rho_1}{\partial q}, \quad G_1 = G\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial q}\right)^2, \tag{11}$$

$$L_1 = -\frac{\sqrt{E}}{\rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial p}, \quad M_1 = 0, \qquad N_1 = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{\partial G}{\partial p}. \tag{12}$$

Summe und Produkt der Hauptkrümmungen der Evolute werden hieraus in bekannter Weise gebildet; die Resultate sind:

$$(13) \qquad H_1 = -\frac{\sqrt{E}\left[G\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial q}\right)^2\right]}{G\rho_1\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\frac{\partial\rho_1}{\partial p}} - \frac{1}{2\sqrt{E}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)}\frac{\partial \log G}{\partial p},$$

$$(14) \qquad K_1 = -\frac{1}{2\rho_1\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{\partial\rho_1}{\partial p}}\frac{\partial \log G}{\partial p}.$$

Hierin, sowie in (10) können die Ableitungen $\frac{\partial \log E}{\partial q}$ und $\frac{\partial \log G}{\partial p}$ durch die geodätischen Krümmungen g_1 und g_2 der Krümmungscurven $q=$ const., $p=$ const. vermöge der Gleichungen

$$(15) \qquad g_1 = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \log E}{\partial q}, \qquad g_2 = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \log G}{\partial p}$$

ersetzt werden. Eliminirt man diese Ableitungen, sowie $\frac{\partial\rho_1}{\partial p}$ und $\frac{\partial\rho_1}{\partial q}$ aus (13, 14, 15) und der ersten Gleichung (10), fügt dann der entstehenden Relation diejenige hinzu, welche in gleicher Weise bei Bevorzugung der zweiten Schale der Evolute sich ergeben würde, so erhält man:

$$(16) \qquad \begin{cases} [H_1(\rho_1-\rho_2)+\rho_2 g_2]\,\rho_2 g_2 + K_1(\rho_1-\rho_2)^2(1+\rho_1^2 g_1^2) = 0, \\ [H_2(\rho_2-\rho_1)+\rho_1 g_1]\,\rho_1 g_1 + K_2(\rho_1-\rho_2)^2(1+\rho_2^2 g_2^2) = 0. \end{cases}$$

Dies sind die gesuchten Gleichungen, welche für

$$r_k = \frac{1}{\rho_k} \qquad (k=1,2)$$

die Form annehmen:

$$(17) \qquad \begin{cases} r_1^3 g_2\,[r_1 g_2 - H_1(r_1-r_2)] + K_1(r_1-r_2)^2(r_1^2+g_1^2) = 0, \\ r_2^3 g_1\,[r_2 g_1 - H_2(r_2-r_1)] + K_2(r_1-r_2)^2(r_2^2+g_2^2) = 0. \end{cases}$$

3. Die Einführung der Hauptkrümmungshalbmesser der Evolute bewirkt, dass jede Flächenklasse, welche durch eine invariante partielle Differentialgleichung dritter Ordnung definirt wird, durch eine geometrische Relation gekennzeichnet werden kann. So ist von HALPHEN [Bulle-

tin de la Société mathématique de France, 4 (1876)] für die WEINGARTEN'schen Flächen die Gleichung

$$(18)\qquad K_1K_2(H^2-4K)^2-K^4=0$$

gegeben worden. Im Allgemeinen ist es zur Vermeidung umständlicher Eliminationen vorteilhaft, anstatt der Grössen H_1, H_2 oder wenigstens gleichzeitig mit ihnen auch g_1 und g_2 zu verwerten. Denn die stets auftretenden Ableitungen von ρ_1 und ρ_2 oder r_1 und r_2 kommen in jenen quadratisch vor, während sie, durch g_1, g_2, K_1, K_2 ausgedrückt, aus (10, 15, 14) und der entsprechenden Gleichung für K_2 als ganze resp. gebrochene lineare Functionen erscheinen. Die Werte sind:

$$(19)\qquad \left|\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial r_1}{\partial p}=\dfrac{r_1^4}{r_1-r_2}\dfrac{g_2}{K_1}, & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial r_1}{\partial q}=(r_1-r_2)g_1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial r_2}{\partial p}=(r_2-r_1)g_2, & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial r_2}{\partial q}=\dfrac{r_2^4}{r_2-r_1}\dfrac{g_1}{K_2}. \end{array}\right.$$

Sie können z. B. dazu verwandt werden, eine charakteristische Eigenschaft der geradlinigen Flächen zu finden. Man definirt diese Flächen zweckmässig durch die Bedingung, dass die eine Schaar ihrer Asymptotencurven geodätisch ist. Bezeichnet nun

$$Pdu+Qdv=0$$

die Differentialgleichung dieser Schaar, so drückt sich die gestellte Bedingung durch die Gleichung aus:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{GP-FQ}{\sqrt{GP^2-2FPQ+EQ^2}}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{FP-EQ}{\sqrt{GP^2-2FPQ+EQ^2}}.$$

Die krummlinigen Coordinaten seien die Parameter der Krümmungscurven, so kann gesetzt werden

$$P=\sqrt{L}=\sqrt{Er_1},\qquad Q=\sqrt{-N}=\sqrt{-Gr_2},$$

wenn von den beiden Hauptkrümmungen $r_1>0$, demnach $r_2<0$ angenommen wird. Die obige Bedingung wird alsdann

$$20)\qquad \frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{Gr_1}{r_1-r_2}}+\frac{\partial}{\partial q}\sqrt{\frac{-Er_2}{r_1-r_2}}=0$$

und transformirt sich vermöge (15, 19) in

$$(21)\qquad g_2\sqrt{r_1}\left[\frac{r_1^3 r_2}{K_1}+3(r_1-r_2)^2\right]\mp g_1\sqrt{-r_2}\left[\frac{r_2^3 r_1}{K_2}+3(r_1-r_2)^2\right]=0.$$

Die beiden Vorzeichen von $\sqrt{-\frac{r_2}{r_1}}$ entsprechen den beiden Schaaren der Asymptotencurven.

Handelt es sich zweitens um die Bestimmung der Gauss'schen Invariante der Differentialform

$$B = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

so setze man für die Parameter der Krümmungslinien

$$K_b = -\frac{1}{\sqrt{LN}}\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\sqrt{LN}}\frac{\partial N}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\sqrt{LN}}\frac{\partial L}{\partial q}\right)\right\},$$

entnehme aus (9) die Werte

$$L = Er_1, \qquad N = Gr_2$$

und benutze die Fundamentalgleichungen (3), (10), die letzteren in der Form

$$\frac{\partial r_1}{\partial q}+\frac{r_1-r_2}{2E}\frac{\partial E}{\partial q}=0, \qquad \frac{\partial r_2}{\partial p}+\frac{r_2-r_1}{2G}\frac{\partial G}{\partial p}=0.$$

Dann liefert die Durchführung der Rechnung

$$(22)\qquad K_b = \frac{1}{2}(r_1+r_2)$$
$$+\frac{1}{4r_1^2r_2^2}\left\{r_1 g_2^2\left(\frac{r_1^3r_2}{K_1}+(r_1-r_2)^2\right)+r_2g_1^2\left(\frac{r_2^3r_1}{K_2}+(r_1-r_2)^2\right)\right\}.$$

Für die Annahme $K_b = 0$ ergibt sich eine Klasse von Flächen, deren Asymptotencurven durch Quadraturen bestimmbar sind.

4. Die Einführung geometrischer Grössen, wie sie im Vorhergehenden für die dritte Ordnung angedeutet worden ist, erweist sich als besonders nützlich, wenn es sich um die Angabe eines analytischen Kennzeichens für eine Flächenklasse handelt, welche durch eine vorgeschriebene Eigenschaft definirt wird. Denn sobald es gelingt, diese Eigenschaft in

eine metrische Relation umzusetzen, so ist damit der Weg zur Auffindung der gesuchten partiellen Differentialgleichung vorgezeichnet. In der oben erwähnten Abhandlung hat BONNET die, aus

$$F = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \frac{E}{G}}{\partial p \partial q} = 0$$

leicht abzuleitende metrische Eigenschaft der Flächen mit isometrischen Krümmungscurven aufgestellt, deren partielle Differentialgleichung neuerdings auf einem ganz anderen Wege durch WEINGARTEN bestimmt worden ist (a. o. a. O.). Für diese, wie für andere interessante Flächenklassen, welche von partiellen Differentialgleichungen vierter Ordnung abhängen, reicht die Benutzung der auf die Krümmungslinien bezogenen Grössen $g_{\varphi\psi}$ aus. Es werde gesetzt:

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial g_1}{\partial p} = g_{11}, & \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial g_1}{\partial q} = g_{12}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial g_2}{\partial p} = g_{21}, & \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial g_2}{\partial q} = g_{22}. \end{cases}$$

Dann erhält man z. B. für die, der vorigen verwandte Klasse von Flächen, deren Krümmungslinien auf der GAUSS'schen Kugel ein isometrisches System entspricht [WEINGARTEN, Monatsb. d. Berl. Akad. 1886], aus

$$\mathfrak{F} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}}}{\partial p \partial q} = 0$$

die Gleichung

$$(24) \qquad \frac{g_1 g_2 r_1 r_2}{r_1 - r_2} \left(\frac{r_1}{K_1} + \frac{r_2}{K_2} \right) - \frac{r_2}{r_1} g_{11} + \frac{r_1}{r_2} g_{22} = 0.$$

Es sei die entsprechende Relation noch für die Flächen mit einer Schaar ebener Krümmungscurven zu bestimmen. Bezeichnet φ_1 den Winkel zwischen der Flächen-Normale und der Hauptnormale der Krümmungslinie $q =$ const., so muss nach einem bekannten Satze

$$\varphi_1 = f(q) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} = 0$$

sein, wenn die Schaar $q =$ const. eben sein soll. Ferner hat man

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{g_1}{r_1},$$

und kann daher für die betrachtete Flächenklasse allgemein setzen:

$$\frac{\partial \frac{g_1}{r_1}}{\partial p} = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich mit Hilfe von (19, 23) in die gesuchte:

(25) $$(r_1 - r_2) K_1 g_{11} - r_1^3 g_1 g_2 = 0.$$

Berlin, September 1889.

ÜBER DIE ALLGEMEINE FORM DER EINDEUTIGEN INTEGRALE DER LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT DOPPELTPERIODISCHEN COEFFICIENTEN

VON

E. A. STENBERG
in HELSINGFORS.

Von den zahlreichen Untersuchungen über lineare homogene Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten, welche seit HERMITE's berühmter Behandlung der Lamé'schen Gleichung [1] und zwar durch sie angeregt, ausgeführt worden, nimmt neben den wichtigen Sätzen der Herren PICARD, MITTAG-LEFFLER und HALPHEN über das Verhalten der eindeutigen Integrale bei Veränderung des Arguments um eine Periode [2] die Untersuchung des Herrn FLOQUET über die analytische Form jener Integrale [3] durch ihre allgemeine Giltigkeit eine besonders hervorragende Stellung in der Theorie der betreffenden Differentialgleichungen ein.

---

[1] HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques,* premier fascicule. Paris, Gauthier-Villars 1885.

[2] PICARD, *Sur une classe d'équations différentielles linéaires.* Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. 19 Janvier 1880.

MITTAG-LEFFLER, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques.* Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. 16 Février 1880.

HALPHEN, *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables.* Tome 28 du Recueil dit des Savants étrangers.

[3] FLOQUET, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques.* Annales scient. de l'école normale supérieure. Année 1884.

Von den erwähnten Sätzen ausgehend findet der letztgenannte Gelehrte dass die eindeutigen Integrale in Gruppen eingetheilt werden können von der Art dass, wenn $y_1, y_2, \ldots, y_m$ eine solche Gruppe bilden, so hat y_i die Form

$$a_{ii} + (b_{i0}u + b_{i1}u') + (c_{i0}u^2 + c_{i1}u'u + c_{i2}u'^2) + \ldots$$
$$+ (h_{i0}u^{i-1} + \ldots + h_{i,\,i-1}u'^{i-1}),$$

wo die Coefficienten $a, b, c, \ldots, h$ doppeltperiodische Functionen zweiter Gattung mit denselben Multiplicatoren und

$$u = \frac{2\omega\omega'}{\pi i}\left(\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} - \frac{\eta}{\omega}x\right), \qquad u' = -\frac{2\omega\omega'}{\pi i}\left(\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} - \frac{\eta'}{\omega'}x\right)$$

sind. Da diese analytische Form der Integrale eine auffallend grosse Menge verschiedener doppeltperiodischer Functionen enthält — ihre Anzahl ist z. B. in der obigen Gruppe $\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ — habe ich versucht Relationen zwischen ihren Coefficienten aufzufinden um somit eine Form aufzustellen, die in dieser Hinsicht einfacher wäre. In Betreff des Resultats meiner Untersuchung, die hier in den acht ersten Paragraphen folgt, verweise ich auf § 9, wo ich eine Form angegeben habe, welche sich dadurch von der Floquet'schen unterscheidet, dass die Anzahl der doppeltperiodischen Functionen derjenigen der Integrale selbst gleichkommt. In meiner Form treten aber ausser den doppeltperiodischen noch andere, von mir durch $A_{\mu,\nu}$ bezeichnete, Functionen auf, welche die Stelle der Potenzen von u und u' sowie ihrer Produkte einnehmen. Diese Functionen lassen sich doch, wie aus § 10 ersichtlich, eindeutig bestimmen, sobald die in § 9, Mom. 3, aufgestellten $m(m-1)$ Constanten bekannt sind.

1. Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten n linear unabhängige, eindeutige Integrale hat, kann man, wie bekannt, immer ein System von n linear unabhängigen eindeutigen Integralen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ finden, welches sich so in Gruppen eintheilen lässt, dass wenn $f_\lambda(x), f_{\lambda+1}(x), \ldots, f_{\lambda+\mu}(x)$ die zu einer Gruppe gehörenden Integrale sind, so erleiden sie bei Vermehrung des Arguments um eine beliebige Periode 2ϖ folgende Veränderungen

$$f_\lambda(x+2\bar{\omega}) = cf_\lambda(x),$$

$$f_{\lambda+\tau}(x+2\bar{\omega}) = cf_{\lambda+\tau}(x) + l_\tau[f_\lambda(x)\,,\,f_{\lambda+1}(x)\,,\,\ldots\,,\,f_{\lambda+\tau-1}(x)], \quad (\tau=1,2,\ldots,\mu)$$

wo c eine von x unabhängige Grösse und l_τ eine lineare algebraische Function der eingeklammerten Grössen ist. Ausserdem lässt sich eine homogene lineare Differentialgleichung $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten aufstellen, zu der die erwähnte Gruppe ein Fundamentalsystem von Integralen bildet. Hierdurch wird die Frage über die allgemeine Form der eindeutigen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten auf die entsprechende einfachere Untersuchung der Integrale einer solchen Differentialgleichung zurückgeführt, deren sämmtliche Integrale eindeutig sind und zur selben Gruppe gehören. Eine Differentialgleichung dieser letzteren Art werde ich kurzweg

$$\mathfrak{P}_j = 0$$

bezeichnen, wobei j die Ordnungszahl bedeutet.

2. Es sei n eine gewisse positive ganze Zahl. Von jeder Differentialgleichung $\mathfrak{P}_{n-1}=0$ setze ich nun folgende Eigenschaft voraus, welche bekanntlich jeder Differentialgleichung $\mathfrak{P}_2=0$ zukommt, nämlich dass sie ein Fundamentalsystem von Integralen von der Form

$$y_1 = \varphi(x),$$

$$y_\mu = \varphi(x)[A_{\mu,1} + A_{\mu,2}\varphi_{\mu,2}(x) + \ldots + A_{\mu,\mu-1}\varphi_{\mu,\mu-1}(x) + \varphi_{\mu,\mu}(x)],$$

$$(\mu=2,3,\ldots,n-1)$$

hat, wo $\varphi(x)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung, $\varphi_{\mu,2}(x)$, $\varphi_{\mu,3}(x)\,,\,\ldots\,,\,\varphi_{\mu,\mu}(x)$ solche Functionen erster Gattung und $A_{\mu,\nu}$ ganze algebraische Functionen $(\mu-\nu)^{\text{ten}}$ Grades von x und $\frac{\sigma'}{\sigma}(x-x_0)$ sind, wobei x_0 eine beliebig gewählte constante Grösse bedeutet, welche keinen Einfluss auf die Function $\varphi(x)$ hat, dagegen aber gewöhnlich als Unendlichkeitsstelle der Functionen $\varphi_{\mu,\nu}(x)$ auftritt. Ausserdem nehme ich von den Functionen $A_{\mu,\nu}$, welche ich unter Benutzung der kürzeren Bezeichnung

$$\psi = -\frac{\sigma'}{\sigma}(x-x_0)$$

als Functionen zweier unabhängigen Variabelen x und ψ betrachte, an, erstens dass sie kein von den Veränderlichen unabhängiges Glied enthalten und zweitens dass es möglich ist gewisse Constanten

$$a_{\mu,\nu,\tau} \quad \text{und} \quad b_{\mu,\nu,\tau} \qquad (\tau=1,2,\ldots,\mu-\nu)$$

aufzustellen, welche die Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x} A_{\mu,\nu} = a_{\mu,\nu,1} A_{\mu,\nu+1} + a_{\mu,\nu,2} A_{\mu,\nu+2} + \ldots + a_{\mu,\nu,\mu-\nu-1} A_{\mu,\mu-1} + a_{\mu,\nu,\mu-\nu},$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} A_{\mu,\nu} = b_{\mu,\nu,1} A_{\mu,\nu+1} + b_{\mu,\nu,2} A_{\mu,\nu+2} + \ldots + b_{\mu,\nu,\mu-\nu-1} A_{\mu,\mu-1} + b_{\mu,\nu,\mu-\nu}$$

für jeden Werth der Veränderlichen genügen.

Auch diese Eigenschaft kommt jeder Gleichung $\mathfrak{P}_2 = 0$ zu.

Auf diesen Voraussetzungen fussend werde ich im Folgenden beweisen dass auch jede Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $\mathfrak{P}_n = 0$ und somit überhaupt jede Gleichung der betreffenden Art $\mathfrak{P}_j = 0$ die genannten Eigenschaften besitzt.

3. Durch eine Substitution $y = y_1 \int u dx$ kann die Gleichung $\mathfrak{P}_n = 0$ immer in eine Differentialgleichung $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, *die auch von der mit* $\mathfrak{P}_j = 0$ *bezeichneten Art ist,* übergeführt werden, weil es immer eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung y_1 giebt, welche $\mathfrak{P}_n = 0$ integrirt. Die so erhaltene Differentialgleichung, die ich $\mathfrak{P}_{n-1}^{(1)} = 0$ bezeichnen werde, hat der Annahme nach ein Fundamentalsystem von Integralen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ von der Form

$$u_1 = \varphi^{(1)}(x),$$

$$u_\mu = \varphi^{(1)}(x)[A_{\mu,1}^{(1)} + A_{\mu,2}^{(1)} \varphi_{\mu,2}^{(1)}(x) + \ldots + A_{\mu,\mu-1}^{(1)} \varphi_{\mu,\mu-1}^{(1)}(x) + \varphi_{\mu,\mu}^{(1)}(x)], \qquad (\mu=2,3,\ldots,n-1)$$

wo aber nicht nur $\varphi_{\mu,2}^{(1)}(x), \varphi_{\mu,3}^{(1)}(x), \ldots, \varphi_{\mu,\mu-1}^{(1)}(x)$ sondern auch $\varphi^{(1)}(x)$ doppeltperiodische Functionen *erster* Gattung sind.

Die hier vorkommenden Functionen

$$A_{\mu,\nu}^{(1)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu-\nu} \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu-\nu-\lambda} C_{\lambda,\rho}^{(\mu,\nu)} \psi^\lambda x^\rho \qquad \binom{\mu=2,3,\ldots,n-1}{\nu=1,2,\ldots,\mu-1}$$

wo $C_{0,0}^{(\mu,\nu)} = 0$ ist, haben laut der Voraussetzung die Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial x} A_{\mu,\nu}^{(1)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-\nu-1} a_{\mu,\nu,\tau}^{(1)} A_{\mu,\nu+\tau}^{(1)} + a_{\mu,\nu,\mu-\nu}^{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} A_{\mu,\nu}^{(1)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-\nu-1} b_{\mu,\nu,\tau}^{(1)} A_{\mu,\nu+\tau}^{(1)} + b_{\mu,\nu,\mu-\nu}^{(1)}.$$

Um nun die Integration der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ zu bewerkstelligen, führe ich statt der doppeltperiodischen Functionen $\varphi_{2,2}^{(1)}(x), \varphi_{3,2}^{(1)}(x), \ldots, \varphi_{n-1,n-1}^{(1)}(x)$ andere elliptische Functionen ein, die ich $\Phi_{2,2}^{(1)}(x), \Phi_{3,2}^{(1)}(x), \ldots, \Phi_{n-1,n-1}^{(1)}(x)$ nennen werde. Vor dem ist es aber nöthig folgende Vorbemerkungen zu machen.

Jede elliptische Function $\Phi(x)$ kann als Summe zweier solchen Functionen $G(x)$ und $H(x)$ betrachtet werden, von denen die erstere die Eigenschaft hat, dass ihr Integral eine eindeutige Function ist, und die letztere nur Unendlichkeitsstellen *erster Ordnung* hat. Diese Functionen bestimme ich so, dass wenn

$$\Phi(x) = C + \sum C_\rho^{(0)} \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \xi_\rho) + \Sigma C_\rho \wp(x - \xi_\rho) + \ldots$$

ist, so wird

$$H(x) = \sum C_\rho^{(0)} \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \xi_\rho)$$

sein. Hierdurch ergiebt sich

$$\int G(x)dx = C.x + K.\psi + F(x),$$

wo

$$K = -\Sigma C_\rho$$

und $F(x)$ eine elliptische Function ist.

In analoger Weise werde ich die neuen Functionen $\Phi_{\mu,\nu}^{(1)}(x)$ als Summen von je zwei Functionen

$$\Phi_{\mu,\nu}^{(1)}(x) = G_{\mu,\nu}^{(1)}(x) + H_{\mu,\nu}^{(1)}(x)$$

und

$$\int G_{\mu,\nu}^{(1)}(x)dx = C_{\mu,\nu}^{(1)} x + K_{\mu,\nu}^{(1)} \psi + F_{\mu,\nu}^{(1)}(x)$$

schreiben können.

Unter Zugrundelegung dieser beiden Gleichungen stelle ich zur Bestimmung der einzuführenden elliptischen Functionen $\Phi^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ die Recursionsformel

$$\Phi^{(1)}_{\mu,\nu}(x) = \varphi^{(1)}(x)\cdot\varphi^{(1)}_{\mu,\nu}(x) - \sum_{\tau=1}^{\tau=\nu-1}\left[a^{(1)}_{\mu,\tau,\nu-\tau} + b^{(1)}_{\mu,\tau,\nu-\tau}\wp(x-x_0)\right]F^{(1)}_{\mu,\tau}(x) \qquad \binom{\mu=2,3,\ldots,n-1}{\nu=2,3,\ldots,\mu}$$

auf. Die hier vorkommende noch unbestimmte Function $F^{(1)}_{\mu,1}(x)$ ergibt sich durch die Gleichung

$$\Phi^{(1)}_{\mu,1}(x) = \varphi^{(1)}(x). \qquad (\mu=1,2,\ldots,n-1)$$

Durch Einführung dieser Functionen wird nun

$$u_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu}\Phi^{(1)}_{\mu,\nu}(x) + \sum_{\nu=2}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu}\sum_{\tau=1}^{\tau=\nu-1} f^{(1)}_{\mu,\nu,\tau}(x) \qquad (\mu=1,2,\ldots,n-1)$$

wo ich der Kürze wegen

$$A^{(1)}_{\mu,\mu} = 1,$$

$$f^{(1)}_{\mu,\nu,\tau}(x) = \left[a^{(1)}_{\mu,\tau,\nu-\tau} + b^{(1)}_{\mu,\tau,\nu-\tau}\wp(x-x_0)\right]F^{(1)}_{\mu,\tau}(x)$$

geschrieben habe.

4. Durch theilweise Integration erhalte ich

$$\int A^{(1)}_{\mu,\nu}G^{(1)}_{\mu,\nu}(x)\,dx = A^{(1)}_{\mu,\nu}\left[C^{(1)}_{\mu,\nu}x + K^{(1)}_{\mu,\nu}\psi + F^{(1)}_{\mu,\nu}(x)\right]$$

$$-\int\left(C^{(1)}_{\mu,\nu}x + K^{(1)}_{\mu,\nu}\psi\right)\frac{d}{dx}A^{(1)}_{\mu,\nu}\,dx - \int\sum_{\tau=\nu+1}^{\tau=\mu}A^{(1)}_{\mu,\tau}f^{(1)}_{\mu,\tau,\nu}(x)\,dx$$

und da

$$\int\left(C^{(1)}_{\mu,\nu}x + K^{(1)}_{\mu,\nu}\psi\right)\frac{d}{dx}A^{(1)}_{\mu,\nu}\,dx = \sum_{\rho=2}^{\rho=\mu-\nu+1}\frac{\rho-1}{\rho}C^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{0,\rho-1}x^\rho$$

$$+\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\mu-\nu+1}\frac{\lambda-1}{\lambda}K^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,0}\psi^\lambda + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-\nu}\sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-\nu-\lambda+1}\left(C^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda,\rho-1} + \frac{\lambda-1}{\lambda}K^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,\rho}\right)\psi^\lambda\cdot x^\rho$$

$$-\int R^{(1)}_{\mu,\nu}\,dx,$$

$$R^{(1)}_{\mu,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-\nu}\sum_{\rho=0}^{\rho=\mu-\nu-\lambda}\left(C^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda,\rho} - \frac{\rho+1}{\lambda}K^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,\rho+1}\right)\psi^\lambda\cdot x^\rho,$$

ergibt sich

$$\int A^{(1)}_{\mu,\nu} G^{(1)}_{\mu,\nu}(x)dx = B^{(1)}_{\mu,\nu} + A^{(1)}_{\mu,\nu} F^{(1)}_{\mu,\nu}(x) + \int R^{(1)}_{\mu,\nu} dx$$

$$- \int dx \sum_{\tau=\nu+1}^{\tau=\mu} A^{(1)}_{\mu,\tau} f^{(1)}_{\mu,\tau,\nu}(x),$$

$$B^{(1)}_{\mu,\nu} = \sum_{\rho=2}^{\rho=\mu-\nu+1} \frac{1}{\rho} C^{(1)}_{\mu,\nu} c^{(\mu,\nu)}_{0,\rho-1} x^\rho + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-\nu+1} \frac{1}{\lambda} \psi^\lambda \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu-\nu-\lambda+1} K^{(1)}_{\mu,\nu} c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,\rho} x^\rho,$$

und

$$\int \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} A^{(1)}_{\mu,\nu} G^{(1)}_{\mu,\nu}(x)dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} [B^{(1)}_{\mu,\nu} + A^{(1)}_{\mu,\nu} F^{(1)}_{\mu,\nu}(x)] + \int dx \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} R^{(1)}_{\mu,\nu}$$

$$- \int dx \sum_{\nu=2}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} \sum_{\tau=1}^{\tau=\nu-1} f^{(1)}_{\mu,\nu,\tau}(x).$$

Zufolge dieser Gleichung erhält man bei der Integration der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ das Resultat

$$\int u_\mu dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} B^{(1)}_{\mu,\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} F^{(1)}_{\mu,\nu}(x) + \int dx \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} R^{(1)}_{\mu,\nu} + \int dx \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x) \qquad (\mu=1, 2, \ldots, n-1),$$

wo

$$B^{(1)}_{\mu,\mu} = C^{(1)}_{\mu,\mu} x + K^{(1)}_{\mu,\mu} \psi$$

zu setzen ist.

Die in dieser Formel noch zu integrirenden Functionen $\sum R^{(1)}_{\mu,\nu}$ und $\sum A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ werden, wie sich aus den unmittelbar bevorstehenden Untersuchungen ergeben wird, durch die Anforderung, dass die Integrale der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ eindeutig sein müssen, identisch verschwinden.

5. Dieser Anforderung kann nur dadurch Genüge geleistet werden dass die Function $\sum A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ in der Umgebung jeder dem Werthe x_0 incongruenten Stelle den Character einer ganzen Function hat.

Es sei

$$H^{(1)}_{\mu,\nu}(x) = \sum_\rho \alpha^{(\rho)}_{\mu,\nu} \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \xi_\rho) - \frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0) \sum_\rho \alpha^{(\rho)}_{\mu,\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

so muss also die Gleichung

$$\alpha^{(\rho)}_{\mu,1} A^{(1)}_{\mu,1} + \alpha^{(\rho)}_{\mu,2} A^{(1)}_{\mu,2} + \ldots + \alpha^{(\rho)}_{\mu,\mu-1} A^{(1)}_{\mu,\mu-1} + \alpha^{(\rho)}_{\mu,\mu} = 0$$

erfüllt werden, wenn für x ein beliebiger dem Werthe ξ_ρ congruenter Werth substituirt wird. Hieraus ergiebt sich aber dass diese Gleichung in Beziehung auf ψ und x eine Identität sein muss, denn eine ganze algebraische Function von x und $\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)$ kann nicht ohne identisch zu verschwinden für sämmtliche Werthe des Argumentes x, welche einem gewissen Werthe congruent sind, Null werden.[1]

---

[1] Jede solche Function

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \sum_{\rho=0}^{\rho=m-\lambda} \beta_{\lambda,\rho} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)\right)^{\lambda} x^{\rho}$$

geht nämlich durch die Substitution $x = \xi + 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$ in eine ganze algebraische Function von 2ν über, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen von $\omega + \frac{\nu'}{\nu}\omega'$ und $\eta + \frac{\nu'}{\nu}\eta'$ sind. Von diesen hat speciell der Coefficient der höchsten Potenz von 2ν das Aussehen

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \beta_{\lambda,m-\lambda}\left(\eta + \frac{\nu'}{\nu}\eta'\right)^{\lambda}\left(\omega + \frac{\nu'}{\nu}\omega'\right)^{m-\lambda} = \left(\omega + \frac{\nu'}{\nu}\omega'\right)^{m} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \beta_{\lambda,m-\lambda}\left(\frac{\eta + \frac{\nu'}{\nu}\eta'}{\omega + \frac{\nu'}{\nu}\omega'}\right)^{\lambda}.$$

Wenn nun die ursprüngliche Function für jeden Werth $x = \xi + 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$, wo ν und ν' beliebige ganzzahlige Werthe haben, Null wird, müssen sämmtliche Coefficienten der letzteren Function für jeden rationalen Werth der Grösse $\frac{\nu'}{\nu}$ verschwinden. Hieraus folgt, da der Bruch

$$\frac{\eta + \frac{\nu'}{\nu}\eta'}{\omega + \frac{\nu'}{\nu}\omega'} = \frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi i}{2\omega} \cdot \frac{1}{\omega' + \frac{\nu}{\nu'}\omega}$$

ist und also für verschiedene Werthe der Grösse $\frac{\nu'}{\nu}$ verschiedene Werthe annimmt, dass in der ursprünglichen Function sämmtliche Glieder von der Dimension m fehlen, und so ergiebt sich schliesslich dass diese Function identisch Null ist.

Wären nun die Functionen $A^{(1)}_{\mu,1}$, $A^{(1)}_{\mu,2}$, ..., $A^{(1)}_{\mu,\mu-1}$ sämmtlich von verschiedener Ordnung müsste jeder Coefficient $\alpha^{(\rho)}_{\mu,\nu}$ Null sein und somit jede Function $H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ identisch verschwinden. Sind aber nicht alle $A^{(1)}_{\mu,\nu}$ von verschiedener Ordnung und giebt es unter den Coefficienten $\alpha^{(\rho)}_{\mu,\nu}$ solche, die nicht Null sind, so kann man wie aus der folgenden Auseinandersetzung hervorgeht immer die Summe $\sum A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ gleich einer anderen

$$\sum \overline{A}_{\mu,\nu}\overline{H}_{\mu,\nu}(x)$$

setzen, in der die elliptischen Functionen $\overline{H}_{\mu,\nu}(x)$ dieselbe Form wie $H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ haben müssen, die ganzen algebraischen Functionen von ψ und x $\overline{A}_{\mu,\nu}$ aber sämmtlich von verschiedener Ordnung sind, was das identische Verschwinden der Functionen $\overline{H}_{\mu,\nu}(x)$ und somit auch der betreffenden Summe zur Folge hat.

Ich nenne $\alpha^{(\rho)}_{\mu,k}$ diejenige unter den nicht verschwindenden Grössen $\alpha^{(\rho)}_{\mu,\nu}$, welche den kleinsten zweiten Zeiger hat und nehme an dass es $r+1$ Functionen $A^{(1)}_{\mu,k}$, $A^{(1)}_{\mu,k+1}$, ..., $A^{(1)}_{\mu,k+r}$ von derselben Ordnung m_k giebt. Nun bilde ich die elliptischen Functionen

$$\overline{H}^{(1)}_{\mu,k+\tau}(x) = H^{(1)}_{\mu,k+\tau}(x) - \frac{\alpha^{(\rho)}_{\mu,k+\tau}}{\alpha^{(\rho)}_{\mu,k}} H^{(1)}_{\mu,k}(x) \qquad (\tau=1,2,\ldots,\mu-k)$$

und erhalte, da

$$A^{(1)}_{\mu,k} = -\sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-k} \frac{\alpha^{(\rho)}_{\mu,k+\tau}}{\alpha^{(\rho)}_{\mu,k}} A^{(1)}_{\mu,k+\tau},$$

die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=k-1} A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x) + \sum_{\nu=k+1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} \overline{H}^{(1)}_{\mu,\nu}(x).$$

Durch Einführung dieser Functionen habe ich also einen Ausdruck gefunden, welcher statt $r+1$ nur r Functionen $A^{(1)}_{\mu,\nu}$ von der Ordnung m_k enthält.

6. Damit $\int u_\mu dx$ eindeutig sei ist es nunmehr nöthig und hinreichend dass in der für die Umgebung der Unendlichkeitsstelle $x_0 + 2\varpi$ geltenden Reihenentwicklung der Function $\sum R^{(1)}_{\mu,\nu}$

$$M_{\mu-1}.(x - x_0 - 2\varpi)^{-(\mu-1)} + \ldots + M_1.(x - x_0 - 2\varpi)^{-1} + M_0 + \ldots$$

der Coefficient M_1 Null ist welche Periode 2ϖ auch sein mag.

Der Kürze wegen schreibe ich

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} R^{(1)}_{\mu,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-1} \psi^\lambda . g_\lambda(x),$$

$$g_\lambda(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu-\lambda-1} \gamma_{\lambda,\rho} x^\rho,$$

$$\gamma_{\lambda,\rho} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-\lambda-\rho} \left(C^{(1)}_{\mu,\nu} c^{(\mu,\nu)}_{\lambda,\rho} - \frac{\rho+1}{\lambda} K^{(1)}_{\mu,\nu} c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,\rho+1} \right)$$

sowie die für die Umgebung der Stelle x_0 geltende Reihenentwickelung der λ^{ten} Potenz der Function ψ unter der Form

$$\psi^\lambda = \sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda-1} h_{\lambda,\tau} . (x-x_0)^{-(\lambda-\tau)} + G(x-x_0),$$

wo $G(x-x_0)$ nur positive Potenzen des Argumentes enthält, und der erste Coefficient $h_{\lambda,0}$ den Werth $(-1)^\lambda$ hat. In der Umgebung der Stelle $x_0 + 2\varpi$ bestehen alsdann die Entwickelungen

$$\psi^\lambda = \sum_{\tau=1}^{\tau=\lambda} (x-x_0-2\varpi)^{-\tau} \sum_{\chi=\tau}^{\chi=\lambda} \frac{\underline{|\lambda}}{\underline{|\chi}\,\underline{|\lambda-\chi}} h_{\chi,\chi-\tau} . (-2\tilde{\eta})^{\lambda-\chi} + G(x-x_0-2\varpi),$$

$$g_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{k=\mu-\lambda-1} (x-x_0-2\varpi)^k \sum_{\rho=k}^{\rho=\mu-\lambda-1} \frac{\underline{|\rho}}{\underline{|k}\,\underline{|\rho-k}} \gamma_{\lambda,\rho} . (x_0+2\varpi)^{\rho-k}$$

und somit wird M_1 eine ganze algebraische Function von $x_0 + 2\varpi$ und $2\tilde{\eta}$. Anstatt diese Functionen vollständig aufzustellen suche ich nur die Glieder derselben auf, welche in Beziehung auf diese Grössen von der höchsten Dimension sind. Das Produkt $\psi^\lambda . g_\lambda(x)$ enthält nur ein solches Glied, nämlich das, welches den Werthen $\tau = 1$, $\chi = 1$, $k = 0$ und $\rho = \mu - \lambda - 1$ entspricht, folglich ist die Summe der betreffenden Glieder der Function M_1 gleich

$$-\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-1} \lambda . \gamma_{\lambda,\mu-\lambda-1} (-2\tilde{\eta})^{\lambda-1} (x_0 + 2\varpi)^{\mu-\lambda-1}.$$

Die obige Bedingung dass M_1 für jede Periode 2ϖ gleich Null sein muss kann nur in der Art erfüllt werden, dass M_1 identisch verschwindet (s. § 5). Es ist also

$$\gamma_{\lambda,\mu-\lambda-1} = 0 \qquad (\lambda=1,2,\ldots,\mu-1)$$

d. h. in der Function $\sum R^{(1)}_{\mu,\nu}$ fehlen die Glieder der höchsten Dimension gänzlich. Hieraus folgt aber dass jeder Coefficient dieser Function

$$\gamma_{\lambda,\rho} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\lambda=1,2,\ldots,\mu-1\\ \rho=0,1,\ldots,\mu-\lambda-1\end{pmatrix}$$

ist.

7. Es ist also nun

$$\int u_\mu dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} B^{(1)}_{\mu,\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} F^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$$

und somit erhalten wir ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung $\mathfrak{P}_n = 0$, welche die Form

$$y_1 = \varphi(x),$$

$$y_\mu = \varphi(x)[A_{\mu,1} + A_{\mu,2}\varphi_{\mu,2}(x) + \ldots + A_{\mu,\mu-1}\varphi_{\mu,\mu-1}(x) + \varphi_{\mu,\mu}(x)] \qquad (\mu=2,3,\ldots,n)$$

haben, wo $\varphi(x)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung, $\varphi_{2,2}(x)$, $\varphi_{3,2}(x)$, ..., $\varphi_{n,n}(x)$ solche erster Gattung und die Coefficienten $A_{\mu,\nu}$ ganze algebraische Functionen $(\mu-\nu)^{\text{ten}}$ Grades von x und $\frac{\sigma'}{\sigma}(x-x_0)$ sind, wenn wir

$$A_{\mu,1} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} B^{(1)}_{\mu-1,\nu},$$

$$A_{\mu,\nu} = A^{(1)}_{\mu-1,\nu-1}, \qquad (\nu=2,3,\ldots,\mu-1)$$

$$\varphi_{\mu,\nu}(x) = F^{(1)}_{\mu-1,\nu-1}(x) \qquad (\nu=2,3,\ldots,\mu)$$

schreiben.

Vergleicht man die Ausdrücke $A^{(1)}_{\mu,\nu}$, $B^{(1)}_{\mu,\nu}$ und $R^{(1)}_{\mu,\nu}$, findet man dass

$$\frac{\partial B^{(1)}_{\mu,\nu}}{\partial x} = C^{(1)}_{\mu,\nu} A^{(1)}_{\mu,\nu} - R^{(1)}_{\mu,\nu},$$

$$\frac{\partial B^{(1)}_{\mu,\nu}}{\partial \psi} = K^{(1)}_{\mu,\nu} A^{(1)}_{\mu,\nu}$$

wenn x und ψ als von einander unabhängig betrachtet werden; hieraus folgt, da $\sum R^{(1)}_{\mu,\nu} = 0$ ist,

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} B^{(1)}_{\mu,\nu} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} C^{(1)}_{\mu,\nu} A^{(1)}_{\mu,\nu},$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} B^{(1)}_{\mu,\nu} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} K^{(1)}_{\mu,\nu} A^{(1)}_{\mu,\nu}.$$

Die Functionen $A_{\mu,\nu}$ haben also wie die Functionen $A^{(1)}_{\mu,\nu}$ die Eigenschaft

$$\frac{\partial A_{\mu,\nu}}{\partial x} = a_{\mu,\nu,1}A_{\mu,\nu+1} + a_{\mu,\nu,2}A_{\mu,\nu+2} + \ldots + a_{\mu,\nu,\mu-\nu-1}A_{\mu,\mu-1} + a_{\mu,\nu,\mu-\nu},$$

$$\frac{\partial A_{\mu,\nu}}{\partial \psi} = b_{\mu,\nu,1}A_{\mu,\nu+1} + b_{\mu,\nu,2}A_{\mu,\nu+2} + \ldots + b_{\mu,\nu,\mu-\nu-1}A_{\mu,\mu-1} + b_{\mu,\nu,\mu-\nu}, \qquad \binom{\mu=2,3,\ldots,n}{\nu=1,2,\ldots,\mu-1}$$

und zwar ist hier

$$a_{\mu,1,\tau} = C^{(1)}_{\mu-1,\tau}, \qquad b_{\mu,1,\tau} = K^{(1)}_{\mu-1,\tau}, \qquad (\tau=1,2,\ldots,\mu-1)$$

$$a_{\mu,\nu,\tau} = a^{(1)}_{\mu-1,\nu-1,\tau}, \qquad b_{\mu,\nu,\tau} = b^{(1)}_{\mu-1,\nu-1,\tau}. \qquad \binom{\nu=2,3,\ldots,\mu-1}{\tau=1,2,\ldots,\mu-\nu}$$

8. Wie aus der Differentialgleichung $\mathfrak{P}_n = 0$ eine andere $\mathfrak{P}^{(1)}_{n-1} = 0$ abgeleitet wurde, kann man von der Gleichung $\mathfrak{P}_n = 0$ ausgehend ein System von Differentialgleichungen von der mit $\mathfrak{P}_j = 0$ bezeichneten Art

$$\mathfrak{P}_n = 0, \qquad \mathfrak{P}^{(1)}_{n-1} = 0, \qquad \mathfrak{P}^{(2)}_{n-2} = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}^{(n-1)}_1 = 0$$

aufstellen, worin $\mathfrak{P}^{(\lambda)}_{n-\lambda} = 0$ durch die Substitution von $\varphi^{(\lambda-1)}(x)\int y dx$ statt der abhängig Veränderlichen y aus der Gleichung $\mathfrak{P}^{(\lambda-1)}_{n-\lambda+1} = 0$ abgeleitet worden ist, wenn $\varphi^{(\lambda-1)}(x)$ ein doppeltperiodisches Integral letzterer Gleichung darstellt.

Aus der vorhergehenden Untersuchung folgt dass jede Gleichung $\mathfrak{P}^{(\lambda)}_{n-\lambda} = 0$ ein Fundamentalsystem von der im § 2 angegebenen Form

$$y_1 = \varphi^{(\lambda)}(x),$$
$$y_\mu = \varphi^{(\lambda)}(x)[A^{(\lambda)}_{\mu,1} + A^{(\lambda)}_{\mu,2}\varphi^{(\lambda)}_{\mu,2}(x) + \ldots + A^{(\lambda)}_{\mu,\mu-1}\varphi^{(\lambda)}_{\mu,\mu-1}(x) + \varphi^{(\lambda)}_{\mu,\mu}(x)] \qquad (\mu=2,3,\ldots,n-\lambda)$$

besitzt, und zwar ist hier $\varphi^{(\lambda)}(x)$ eine doppeltperiodische Function *erster* Gattung. Mit Hilfe der in den Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x}A^{(\lambda)}_{\mu,\nu} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-\nu} a^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\tau}A^{(\lambda)}_{\mu,\nu+\tau}, \qquad \frac{\partial}{\partial \psi}A^{(\lambda)}_{\mu,\nu} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-\nu} b^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\tau}A^{(\lambda)}_{\mu,\nu+\tau}$$

vorkommenden Grössen $a^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\tau}$ und $b^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\tau}$ baue ich nun wie in § 3 die elliptischen Functionen $\Phi^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x)$ mittels der Recursionsformel

$$\Phi^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x) = \varphi^{(\lambda)}(x).\varphi^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x) - \sum_{\tau=1}^{\tau=\nu-1} [a^{(\lambda)}_{\mu,\tau,\nu-\tau} + \wp(x-x_0)]F^{(\lambda)}_{\mu,\tau}(x) \qquad \binom{\mu=2,3,\ldots,n-\lambda}{\nu=2,3,\ldots,\mu}$$

auf, indem ich

$$\Phi^{(\lambda)}_{\mu,1}(x) = \varphi^{(\lambda)}(x),$$

$$\Phi^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x) = G^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x) + H^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x) \qquad (\mu=1,2,\ldots,n-\lambda)$$

und

$$\int G^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x)dx = C^{(\lambda)}_{\mu,\nu}x + K^{(\lambda)}_{\mu,\nu}\psi + F^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x)$$

schreibe. Es ergiebt sich sodann aus den Formeln des § 7

$$\varphi^{(\lambda-1)}_{\mu,\nu}(x) = F^{(\lambda)}_{\mu-1,\nu-1}(x)$$

und

$$a_{\mu,\nu,\tau} = a^{(\lambda)}_{\mu-\lambda,\nu-\lambda,\tau} = C^{(\nu)}_{\mu-\nu,\tau}, \qquad b_{\mu,\nu,\tau} = b^{(\lambda)}_{\mu-\lambda,\nu-\lambda,\tau} = K^{(\nu)}_{\mu-\nu,\tau}$$

sowie

$$A_{\mu,\nu} = A^{(\lambda)}_{\mu-\lambda,\nu-\lambda} = A^{(\nu-1)}_{\mu-\nu+1}.$$

Weil

$$\Phi^{(\lambda)}_{1,1}(x) = \Phi^{(\lambda)}_{2,1}(x) = \ldots = \Phi^{(\lambda)}_{n-\lambda,1}(x) = \varphi^{(\lambda)}(x)$$

und also

$$C^{(\lambda)}_{1,1} = C^{(\lambda)}_{2,1} = \ldots = C^{(\lambda)}_{n-\lambda,1}, \qquad K^{(\lambda)}_{1,1} = K^{(\lambda)}_{2,1} = \ldots = K^{(\lambda)}_{n-\lambda,1}.$$

$$F^{(\lambda)}_{1,1}(x) = F^{(\lambda)}_{2,1}(x) = \ldots = F^{(\lambda)}_{n-\lambda,1}(x)$$

erhält man einerseits

$$a^{(\lambda)}_{\nu+1,\nu,1} = a^{(\lambda)}_{\nu+2,\nu,1} = \ldots = a^{(\lambda)}_{n-\lambda,\nu,1}, \qquad b^{(\lambda)}_{\nu+1,\nu,1} = b^{(\lambda)}_{\nu+2,\nu,1} = \ldots = b^{(\lambda)}_{n-\lambda,\nu,1}$$

und andererseits

$$\varphi^{(\lambda)}_{2,2}(x) = \varphi^{(\lambda)}_{3,2}(x) = \ldots = \varphi^{(\lambda)}_{n-\lambda,2}(x)$$

für $\lambda = 0, 1, \ldots, n-\lambda$, wobei man unter $a^{(0)}_{\mu,\nu,\tau}$, $b^{(0)}_{\mu,\nu,\tau}$ und $\varphi^{(0)}_{\mu,\nu}(x)$ die Grössen $a_{\mu,\nu,\tau}$, $b_{\mu,\nu,\tau}$ und $\varphi_{\mu,\nu}(x)$ zu verstehen hat. Wir können also schreiben

$$a^{(\lambda)}_{\mu,\nu,1} = a^{(\lambda)}_{\nu,1}, \qquad b^{(\lambda)}_{\mu,\nu,1} = b^{(\lambda)}_{\nu,1},$$

$$\varphi^{(\lambda)}_{\mu,2}(x) = \varphi^{(\lambda)}_{2}(x).$$

Ich setze nun voraus dass wenn der Zeiger ρ kleiner als die ganze Zahl r ist, so finden die Gleichungen

$$a^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\rho} = a^{(\lambda)}_{\nu,\rho}, \qquad b^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\rho} = b^{(\lambda)}_{\nu,\rho},$$

$$\varphi^{(\lambda)}_{\mu,\rho+1}(x) = \varphi^{(\lambda)}_{\rho+1}(x)$$

statt. Da der letzten Gleichung auch die Form

$$F^{(\lambda)}_{\rho,\rho}(x) = F^{(\lambda)}_{\rho+1,\rho}(x) = \ldots = F^{(\lambda)}_{n-\lambda,\rho}(x)$$

gegeben werden kann, und

$$\Phi^{(\lambda)}_{\mu,r}(x) = \varphi^{(\lambda)}(x) . \varphi^{(\lambda)}_{\mu,r}(x) - \sum_{\tau=1}^{\tau=r-1} [a^{(\lambda)}_{\mu,\tau,r-\tau} + b^{(\lambda)}_{\mu,\tau,r-\tau}\wp(x-x_0)] F^{(\lambda)}_{\mu,r-\tau}(x),$$

so ergiebt diese Voraussetzung

$$\Phi^{(\lambda)}_{r,r}(x) = \Phi^{(\lambda)}_{r+1,r}(x) = \ldots = \Phi^{(\lambda)}_{n-\lambda,r}(x),$$

und also auch

$$C^{(\lambda)}_{r,r} = C^{(\lambda)}_{r+1,r} = \ldots = C^{(\lambda)}_{n-\lambda,r}, \qquad K^{(\lambda)}_{r,r} = K^{(\lambda)}_{r+1,r} = \ldots = K^{(\lambda)}_{n-\lambda,r},$$

$$F^{(\lambda)}_{r,r}(x) = F^{(\lambda)}_{r+1,r}(x) = \ldots = F^{(\lambda)}_{n-\lambda,r}(x).$$

Hieraus erhält man aber

$$a^{(\lambda)}_{\nu+r,\nu,r} = a^{(\lambda)}_{\nu+r+1,\nu,r} = \ldots = a^{(\lambda)}_{n-\lambda,\nu,r}, \qquad b^{(\lambda)}_{\nu+r,\nu,r} = b^{(\lambda)}_{\nu+r+1,\nu,r} = \ldots = b^{(\lambda)}_{n-\lambda,\nu,r},$$

$$\varphi^{(a)}_{r+1,r+1}(x) = \varphi^{(\lambda)}_{r+2,r+1}(x) = \ldots = \varphi^{(\lambda)}_{n-\lambda,r+1}(x),$$

d. h. es bestehen die obigen drei Gleichungen auch wenn $\rho = r$ ist und somit im Allgemeinen.

9. Zusammengefasst ergeben die bisher gefundenen Resultate den Satz:

Die zu derselben Gruppe gehörenden eindeutigen Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten haben die Form

$$\begin{aligned}
y_1 &= \varphi(x),\\
y_2 &= \varphi(x)[A_{2,1} + \varphi_2(x)],\\
y_3 &= \varphi(x)[A_{3,1} + A_{3,2}\varphi_2(x) + \varphi_3(x)],\\
y_4 &= \varphi(x)[A_{4,1} + A_{4,2}\varphi_2(x) + A_{4,3}\varphi_3(x) + \varphi_4(x)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_m &= \varphi(x)[A_{m,1} + A_{m,2}\varphi_2(x) + A_{m,3}\varphi_3(x) + A_{m,4}\varphi_4(x) + \ldots\\
&\qquad \ldots + A_{m,m-1}\varphi_{m-1}(x) + \varphi_m(x)],
\end{aligned}$$

wo

1) $\varphi(x)$ *eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung bedeutet,*

2) $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots, \varphi_m(x)$ *doppeltperiodische Functionen erster Gattung sind, und*

3) *die Grössen* $A_{\mu,\nu}$ *ganze algebraische Functionen von* x *und* $\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)$ *von höchstens* $(\mu - \nu)^{\text{tem}}$ *Grade darstellen, wobei die Constante* x_0 *beliebig gewählt werden kann, und haben diese Functionen die Eigenschaft, dass wenn* $-\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)$ *als eine von* x *unabhängige Veränderliche* ψ *betrachtet wird, so giebt es* $m(m-1)$ *Constanten*

$$
\begin{array}{ll}
a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,m-2}, a_{1,m-1}, & b_{1,1}, b_{1,1}, \ldots, b_{1,m-2}, b_{1,m-1}, \\
a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,m-2}, & b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,m-2}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
a_{m-1,1}, & b_{m-1,1},
\end{array}
$$

welche die $m(m-1)$ *Gleichungen des Systems*

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} A_{\mu,\nu} &= a_{\nu,1} A_{\mu,\nu+1} + a_{\nu,2} A_{\mu,\nu+2} + \ldots + a_{\nu,\mu-\nu-1} A_{\mu,\mu-1} + a_{\nu,\mu-\nu}, \\
\frac{\partial}{\partial \psi} A_{\mu,\nu} &= b_{\nu,1} A_{\mu,\nu+1} + b_{\nu,2} A_{\mu,\nu+2} + \ldots + b_{\nu,\mu-\nu-1} A_{\mu,\mu-1} + b_{\nu,\mu-\nu},
\end{aligned}
\right.
\qquad \binom{\mu = 2, 3, \ldots, m}{\nu = 1, 2, \ldots, \mu-1}
$$

in Identitäten überführen.

10. Die in dieser Gruppe auftretenden $\frac{m(m-1)}{2}$ Function $A_{\mu,\nu}$ werden durch die (§ 9, 3) genannten $m(m-1)$ constanten Grössen eindeutig bestimmt.

Zu diesem Zwecke bezeichne ich mit $s_{\mu,\nu,\rho}$ die Summe sämmtlicher Glieder der Function $A_{\mu,\nu}$, welche in Beziehung auf x und ψ von ρ^{ter} Dimension sind, und mit $s^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\rho}$ die Summe der entsprechender Glieder der Function $A^{(\lambda)}_{\mu,\nu}$. Es wird also

$$
A_{\mu,\nu} = s_{\mu,\nu,1} + s_{\mu,\nu,2} + \ldots + s_{\mu,\nu,\mu-\nu},
$$

$$
A^{(\lambda)}_{\mu,\nu} = s^{(\lambda)}_{\mu,\nu,1} + s^{(\lambda)}_{\mu,\nu,2} + \ldots + s^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\mu-\nu}.
$$

Durch Einführung dieser Bezeichnung erhält der in § 4 definirte Ausdruck $B^{(1)}_{\mu,\nu}$ das Aussehen

$$B^{(1)}_{\mu,\nu} = (C^{(1)}_{\mu,\nu} x + K^{(1)}_{\mu,\nu}\psi) \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-\nu} \frac{s^{(1)}_{\mu,\nu,\rho}}{\rho+1}$$
$$- \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-\nu} \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-\nu-\lambda+1} \frac{\psi^\lambda . x^\rho}{\lambda+\rho}\left(C^{(1)}_{\mu,\nu} c^{(\mu,\nu)}_{\lambda,\rho-1} - \frac{\rho}{\lambda} K^{(1)}_{\mu,\nu} c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,\rho}\right)$$

und somit wird unter Benutzung der in § 6 aufgestellten Coefficienten $\gamma_{\lambda,\rho}$

$$\sum_{k=1}^{k=\mu-1} B^{(1)}_{\mu,k} = \sum_{k=1}^{k=\mu-1} (C^{(1)}_{\mu,k} x + K^{(1)}_{\mu,k}\psi) \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-k} \frac{s^{(1)}_{\mu,k,\rho}}{\rho+1} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-1} \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-\lambda} \frac{\gamma_{\lambda,\rho-1}}{\lambda+\rho}\psi^\lambda . x^\rho.$$

Da aber nach demselben § 6 diese Coefficienten Null sind verschwindet auf der rechten Seite die letztere Summe, und man erhält unter Beachtung der Formeln der §§ 7 und 8

$$A_{\mu,1} = \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-2} \frac{1}{\rho+1} \sum_{k=1}^{k=\mu-\rho-1} (a_{1,k} x + b_{1,k}\psi) s_{\mu,k+1,\rho} + a_{1,\mu-1} x + b_{1,\mu-1}\psi$$

denn aus $A_{\mu,\nu} = A^{(\lambda)}_{\mu-\lambda,\nu-\lambda}$ folgt $s_{\mu,\nu,\rho} = s^{(\lambda)}_{\mu-\lambda,\nu-\lambda,\rho}$.

Aus der letzten Gleichung und der Formel $A_{\mu,\nu} = A^{(\nu-1)}_{\mu-\nu+1,1}$ ergiebt sich nun

$$A_{\mu,\nu} = \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-\nu-1} \sum_{k=1}^{k=\mu-\nu-\rho} \frac{1}{\rho+1}(a_{\nu,k} x + b_{\nu,k}\psi) s_{\mu,\nu+k,\rho} + a_{\nu,\mu-\nu} x + b_{\nu,\mu-\nu}\psi,$$

und es ist also

$$s_{\mu,\nu,1} = a_{\nu,\mu-\nu} x - b_{\nu,\mu-\nu} \frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0),$$

$$s_{\mu,\nu,\rho} = \sum_{k=1}^{k=\mu-\nu-\rho+1} \frac{1}{\rho}\left(a_{\nu,k} x - b_{\nu,k}\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)\right) s_{\mu,\nu+k,\rho-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\mu-\nu-\rho+1} \frac{1}{\rho} s_{\nu+k,\nu,1}\, s_{\mu,\nu+k,\rho-1}. \qquad (\rho = 2, 3, \ldots, \mu-\nu)$$

11. Als Beispiel wähle ich die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} - [3a + 6\wp(x)]\frac{dy}{dx} - [b + 6\wp'(x)]y = 0.$$

Sie gehört zu der Classe von Gleichungen, welche keine scheinbar singulären Stellen besitzen, und deren allgemeines Integral eindeutig ist und nur eine Unendlichkeitsstelle $x = 2\varpi$ von höchstens *zweiter* Ordnung im Periodenparallelogramme haben kann. Diese Classe enthält nur vier Gleichungen dritter Ordnung, den vier Gruppen von Wurzeln der determinirenden Gleichung $-2, 2, 3$; $-2, 1, 4$; $-2, 0, 5$ und $-2, -1, 6$ entsprechend, und unter ihnen ist die obenstehende die der ersten dieser Wurzelgruppen entsprechende.

Diese Gleichung hat das doppeltperiodische Integral

$$y = \frac{\sigma(x - x_1)\sigma(x - x_2)}{\sigma(x_1)\sigma(x_2)\sigma^2(x)} e^{\left(\frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} + \frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)}\right)x},$$

wo x_1 und x_2 durch die Gleichungen

$$\wp(x_1) + \wp(x_2) = a,$$

$$\wp'(x_1) + \wp'(x_2) = b$$

bestimmt werden. Schreiben wir

$$\wp(x_1) = \frac{a + \xi^{\frac{1}{2}}}{2}, \qquad \wp(x_2) = \frac{a - \xi^{\frac{1}{2}}}{2},$$

wird ξ eine Wurzel der Gleichung

$$\xi^3 - 2\alpha\xi^2 + (\alpha^2 - 6ab^2)\xi + b^4 - 2b^2(a^3 - g_2 a - 2g_3) = 0,$$

wo

$$\alpha = g_2 - 3a^2.$$

Da es sich hier nur um die analytische Form der zur selben Gruppe gehörenden Integrale handelt, werde ich keine anderen Fälle untersuchen als die, in welchen sämmtliche Integrale eine einzige Gruppe bilden. Damit dieses stattfindet ist es nöthig und genügend dass die letztere Gleichung nur eine Wurzel hat, d. h. dass die Constanten a und b den Bedingungen

$$18ab^2 + \alpha^2 = 0,$$

$$b\left(81a^4 - 18g_2 a^2 + 24g_3 a - \frac{1}{3}g_2^2\right) = 0$$

genügen. Die beiden Fälle: $b = 0$ und $b \neq 0$ können gleichzeitig behandelt werden.

Das einzige doppeltperiodische Integral y_1 hat die oben angegebene Form, wo x_1 und x_2 durch die Gleichungen

$$\wp(x_1) = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a}{6}}, \qquad \wp(x_2) = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a}{6}},$$

$$\wp'(x_1) + \wp'(x_2) = b$$

eindeutig bestimmt sind. Seine Multiplicatoren sind dritte Wurzeln der Einheit, es bestehen also die Relationen

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3}(\nu\omega + \nu'\omega'), \qquad \frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} + \frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)} = \frac{2}{3}(\nu\eta + \nu'\eta'),$$

wo ν und ν' gewisse ganze Zahlen sind.

Die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 3\left(\frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} + \frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)} + \frac{\sigma'(x-x_1)}{\sigma(x-x_1)} + \frac{\sigma'(x-x_2)}{\sigma(x-x_2)} - 2\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\right)\frac{dz}{dx}$$

$$+ 3\left[2a + \frac{b}{\wp(x_1) - \wp(x_2)}\left(\frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} - \frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)} + \frac{\sigma'(x-x_1)}{\sigma(x-x_1)} - \frac{\sigma'(x-x_2)}{\sigma(x-x_2)}\right) + 4\wp(x)\right]z = 0,$$

welche durch die Substitution $y = y_1\int z dx$ erhalten wird, hat das doppeltperiodische Integral

$$z_1 = \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_2)\right)\wp(x - x_1) + \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_1)\right)\wp(x - x_2) + \frac{g_2}{3} - 3a^2$$

und geht durch die Substitution

$$z = z_1\int u dx$$

in

$$\frac{du}{dx} - \left(3\frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} + 3\frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)} - 2\frac{\sigma'(x+x_1+x_2)}{\sigma(x+x_1+x_2)} + \frac{\sigma'(x-x_1)}{\sigma(x-x_1)} + \frac{\sigma'(x-x_2)}{\sigma(x-x_2)}\right)u = 0$$

über. Diese Gleichung hat das Integral

$$u_1 = \wp(x + x_1 + x_2) + \frac{g_2}{12a} - \frac{3}{4}a.$$

In der allgemeinen Form des Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (I)

$$y_1 = \varphi(x),$$

$$y_2 = \varphi(x)[A_{2,1} + \varphi_2(x)],$$

$$y_3 = \varphi(x)[A_{3,1} + A_{3,2}\varphi_2(x) + \varphi_3(x)]$$

treten also folgende Functionen auf, wenn wir der Einfachheit wegen die beliebige Grösse x_0 gleich $-(x_1 + x_2)$ feststellen,

$$\varphi(x) = \frac{\sigma(x - x_1)\sigma(x - x_2)}{\sigma(x_1)\sigma(x_2)\sigma^2(x)} e^{\left(\frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} + \frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)}\right)x},$$

$$\varphi_2(x) = 4a\frac{\sigma'(x + x_1 + x_2)}{\sigma(x + x_1 + x_2)} - \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_2)\right)\frac{\sigma'(x - x_1)}{\sigma(x - x_1)} - \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_1)\right)\frac{\sigma'(x - x_2)}{\sigma(x - x_2)},$$

$$\varphi_3(x) = 2a\wp(x + x_1 + x_2),$$

$$A_{2,1} = \left(\frac{g_2}{3} - 3a^2\right)x - 4a\frac{\sigma'(x + x_1 + x_2)}{\sigma(x + x_1 + x_2)},$$

$$A_{3,1} = \frac{1}{8a}A_{2,1}^2 + C_1 x + C_2\frac{\sigma'(x + x_1 + x_2)}{\sigma(x + x_1 + x_2)},$$

$$C_1 = \left(\wp(x_2) - \frac{a}{2}\right)\wp'(2x_1 + x_2) + \left(\frac{3}{4}a - \frac{g_2}{12a}\right)C_2,$$

$$C_2 = \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_2)\right)\frac{\sigma'(2x_1 + x_2)}{\sigma(2x_1 + x_2)} + \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_1)\right)\frac{\sigma'(x_1 + 2x_2)}{\sigma(x_1 + 2x_2)},$$

$$A_{3,2} = \frac{1}{4a}A_{2,1}.$$

In dem speziellen Falle, dass $b = 0$ und also auch $\alpha = 0$ ist, gehen diese Functionen, weil $x_1 = -x_2$ wird, in folgende einfachere über:

$$\varphi(x) = \wp(x) - \frac{a}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\sigma'(x + x_1)}{\sigma(x + x_1)} + \frac{\sigma'(x - x_1)}{\sigma(x - x_1)} - 2\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)},$$

$$\varphi_3(x) = \wp(x),$$

$$A_{2,1} = ax + 2\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)},$$

$$A_{3,1} = \frac{1}{4}A_{2,1}^2,$$

$$A_{3,2} = \frac{1}{2}A_{2,1}.$$

SUR UNE TRANSCENDANTE REMARQUABLE TROUVÉE PAR M. FREDHOLM.

Extrait d'une lettre de M. Mittag-Leffler à M. Poincaré.

»Permettez-moi de vous exposer un résultat assez remarquable qui a été trouvé par un de mes élèves, M. Fredholm.

»Autant que je sache, toutes les fonctions qui n'existent que dans un certain domaine du plan et qui ont été étudiées jusqu'ici cessent d'exister, parce que les fonctions elles-mêmes ou leurs dérivées deviennent discontinues sur la frontière. M. Fredholm a trouvé, dans un des champs les plus connus de l'Analyse, une fonction qui est continue, ainsi que toutes ses dérivées, sur toute la frontière qui limite le domaine d'existence de la fonction.

»Ecrivez la fonction θ sous la forme

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\nu^2 t+\nu v} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=-1} e^{\nu^2 t+\nu v} + \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu^2 t+\nu v},$$

et mettez

$$\varphi(t,v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu^2 t+\nu v}.$$

Si la partie réelle de v est négative, la fonction est une fonction uniforme de t pour toutes les valeurs de t dont la partie réelle est négative. La fonction, ainsi que toutes ses dérivees, sont des fonctions continues de t sur l'axe imaginaire. Mais cet axe imaginaire forme la limite du domaine d'existence de la fonction. Pour voir cela, vous n'avez qu'à faire l'observation que la fonction $\varphi(t,v)$ satisfait à l'égalité

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2},$$

et de mettre

$$
\begin{aligned}
\varphi(t,\upsilon) &= p(t-t_0) \\
&= \varphi(t_0,\upsilon) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=t_0} \frac{t-t_0}{\underline{|1}} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^2}{\underline{|2}} + \dots \\
&= \varphi(t_0,\upsilon) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial \upsilon^2}\right)_{t=t_0} \frac{t-t_0}{\underline{|1}} + \left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial \upsilon^4}\right)_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^2}{\underline{|2}} + \dots
\end{aligned}
$$

où t_0 est un point sur l'axe imaginaire.

»D'après le théorème connu de M^me^ Kowalevski[1] la série $p(t-t_0)$ ne peut être convergente, à moins que $\varphi(t_0,\upsilon)$ soit une fonction entière rationnelle ou transcendante de υ. Cela n'a pas lieu, et la fonction $\varphi(t,\upsilon)$ considérée comme fonction de t n'existe donc, pourvu que υ soit une constante dont la partie réelle est négative, qu'à l'intérieur du domaine: partie réelle de $t < 0$.

»En mettant

$$e^t = x,\ e^\upsilon = a,\ |a| < 1,$$

vous obtenez une fonction de x,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu x^{\nu^2},$$

qui n'existe que pour $|x| < 1$ et qui reste continue, ainsi que toutes ses dérivées, pour $|x| = 1$.

»Il est facile de voir qu'on peut beaucoup généraliser ce résultat obtenu par M. Fredholm.»

[1] Journal für Mathematik, t. 80.

SUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES TRANSFORMABLES EN ELLES-MÊMES PAR UN CHANGEMENT DE FONCTION ET DE VARIABLE

PAR

P. APPELL

À PARIS.

1. Les fonctions périodiques d'une variable z sont des fonctions qui ne changent pas quand on y remplace z par $z+\omega$, ω étant une certaine constante. On peut, plus généralement, imaginer des fonctions de z qui ne changent pas de valeur quand on fait sur z une opération déterminée $\varphi(z)$, de telle façon que l'on ait

$$f[\varphi(z)] = f(z).$$

Il peut se faire qu'une fonction $f(z)$ ne change pas quand on fait successivement sur z plusieurs opérations déterminées $\varphi(z)$, $\psi(z)$, ... l'on aura alors

$$f[\varphi(z)] = f(z), \qquad f[\psi(z)] = f(z), \quad \ldots .$$

Telles sont les fonctions doublement périodiques pour lesquelles $\varphi(z) = z + \omega$, $\psi(z) = z + \omega'$, la fonction modulaire de M. Hermite et, plus généralement, les fonctions fuchsiennes et kleinéennes de M. Poincaré pour lesquelles $\varphi(z)$, $\psi(z)$, ... sont certaines fonctions de la forme $\dfrac{az+b}{cz+d}$ ....
Nous avons donné des exemples de fonctions $f(z)$ vérifiant une relation de la forme

$$f[\varphi(z)] = f(z)$$

dans deux Notes présentées à l'Académie des sciences de Paris dans les séances des 21 avril et 19 mai 1879: dans deux de ces exemples $\varphi(z)$ est une fonction algébrique de z, $\varphi(z) = z^2$ ou $z^3 - 1$; dans un autre $\varphi(z)$ est une fonction transcendante $\sin\frac{\pi}{2}z$. M. RAUSENBERGER a publié une suite de Mémoires intéressants sur les fonctions $f(z)$ vérifiant une ou plusieurs relations de la forme ci-dessus, en supposant que les opérations désignées par $\varphi(z)$, $\psi(z)$, ... soient *algébriques:* il a considéré des fonctions plus générales $f(z)$ vérifiant des relations de la forme

$$f[\varphi(z)] = \psi[f(z)],$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant des fonctions algébriques données.[1] A un autre point de vue, des équations fonctionnelles de formes analogues dont les principales sont

$$f[\varphi(z)] = \psi(z)f(z), \qquad f[\varphi(z)] = f(z) + \psi(z),$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant des fonctions données algébriques ou transcendantes, ont été étudiées par ABEL,[2] par M. SCHROEDER,[3] M. KORKINE,[4] M. FARKAS[5] et enfin par M. KOENIGS[6] à qui l'on doit d'importants théorèmes sur l'éxistence et l'expression générale des solutions holomorphes de certaines équations fonctionnelles.

Dans une Note *Sur des équations différentielles linéaires dont les intégrales vérifient des relations de la forme* $F[\varphi(x)] = \psi(x)F(x)$ présentée à

---

[1] Voyez RAUSENBERGER: *Theorie der allgemeinen Periodicität,* (Mathematische Annalen, Tome 18, année 1881); *Zur Theorie der Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden,* (Deux articles. Ibid., année 1882); *Über periodische Functionen zweiter Gattung,* (Ibid., année 1882); *Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variablen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Discontinuitätspunkte.* (Lpz. 1884.)

[2] Oeuvres complètes, publiées par M. M. SYLOW et LIE, Tome II, p. 36.

[3] *Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen,* (Mathematische Annalen, Tome 2); *Über iterirte Functionen,* (Ibid., Tome 3).

[4] *Sur un problème d'interpolation,* (Bulletin des sciences mathématiques, 1882).

[5] Journal de mathématiques de M. RESAL, mars 1884.

[6] *Recherches sur les substitutions uniformes,* (Bulletin des sciences mathématiques, 1883); *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles,* (Annales de l'Ecole Normale, année 1884, supplément); *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles,* (Ibid., novembre 1885).

l'Académie des sciences dans la séance du 7 novembre 1881, j'ai considéré des équations différentielles linéaires et homogènes définissant y en fonction de x et possédant la propriété suivante. Il existe deux fonctions φ et ψ telles qu'en faisant le changement de fonction et de variable

$$x = \varphi(t), \quad y = z\psi(t),$$

on ramène l'équation à la forme primitive où x serait remplacé par t et y par z. En d'autres termes, il existe un changement de fonction et de variable qui transforme l'équation *en elle-même;* si cette hypothèse est réalisée, l'équation admet au moins une intégrale $y = F(x)$ vérifiant une relation de la forme

$$F[\varphi(x)] = A\psi(x)F(x)$$

où A désigne une constante.

On reconnaît dans ce théorème une analogie lointaine avec les théorèmes que M. Picard a donnés sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (Comptes rendus, 1880, premier semestre; Journal de Crelle, t. 90.)

Dans le cas où l'équation différentielle est du second ordre, les deux fonctions φ et ψ existent toujours comme l'ont montré Kummer dans son mémoire sur la série $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, et M. Brioschi dans différents mémoires dont le point de départ se trouve résumé dans les Comptes rendus, t. 93, p. 941. Je me propose, dans le présent travail, d'étudier et d'intégrer une classe étendue de ces équations, en m'appuyant sur les résultats obtenus par M. Koenigs.

2. Rappelons d'abord quelques uns de ces résultats, afin de pouvoir caractériser les équations dont nous allons nous occuper.

La suite des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ est dite *converger régulièrement* vers une limite x, lorsque, à tout nombre positif ε aussi petit que l'on veut, il est possible de faire correspondre un entier N_ε assez grand pour que, *sous la seule condition* $p \geq N_\varepsilon$, on ait

$$|\alpha_p - x| < \varepsilon.[1]$$

---

[1] La notation $|u|$ signifie *module de u.*

Soit une fonction $\varphi(z)$ uniforme dans l'intérieur d'une région R du plan et jouissant de la propriété que, si z est intérieur à cette région, il en est de même du point $z_1 = \varphi(z)$; si nous posons généralement $z_{i+1} = \varphi(z_i)$, les points de la suite

$$z, z_1, z_2, \ldots, z_p$$

sont tous à l'intérieur de la région R. Lorsque cette suite converge régulièrement vers une limite x qui n'est pas pour $\varphi(z)$ un point singulier essentiel, on sait que x est un zéro de la fonction

$$z - \varphi(z)$$

qui doit vérifier l'inégalité

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

Cette valeur de $\varphi'(x)$ sera constamment désignée par a et supposée différente de zéro. Réciproquement, si x désigne un zéro de la fonction $z - \varphi(z)$ tel que $|\varphi'(x)| < 1$, le point x est le centre d'un cercle C_x à l'intérieur duquel: 1°) $\varphi(z)$ est holomorphe, 2°) le module de $\frac{\varphi(z) - x}{z - x}$ reste constamment inférieur à un nombre fixe moindre que 1, 3°) les points $z_1, z_2, \ldots, z_p$ convergent uniformément vers le point x (voyez Koenigs, Annales de l'Ecole normale, 1884, supplément, page 6). Toutes ces conditions étant remplies, nous supposons que les coefficients de l'équation différentielle sont *holomorphes ou méromorphes au point limite* x, hypothèse qui écarte les équations dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques, ou des fonctions fuchsiennes. Nous montrons que toutes ces équations sont intégrables à l'aide de la fonction $B(z)$ introduite par M. Koenigs, et même qu'elles peuvent, par une substitution que nous indiquons, être ramenées à avoir leurs coefficients constants.

3. Pour obtenir une première expression des coefficients de nos équations, nous aurons à nous appuyer sur les considérations suivantes.

Soit $\psi(z)$ une fonction de z holomorphe dans le cercle C_x et telle que le module de $\psi(x)$ est moindre que l'unité. Alors, en désignant par k une constante positive comprise entre l'unité et le module de $\psi(x)$, on pourra, à cause de la continuité de $\psi(z)$, assigner un nombre positif ρ tel que, sous la condition

$$|z - x| < \rho$$

on ait

$$|\phi(z)| \leqq k.$$

Soit, d'autre part, $\varpi(z)$ une fonction *holomorphe* dans le cercle C_x. La série

$$(1) \qquad F_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \phi(z)\phi(z_1)\phi(z_2)\dots\phi(z_n)\varpi(z_n)$$

$$= \phi(z)\varpi(z) + \phi(z)\phi(z_1)\varpi(z_1) + \phi(z)\phi(z_1)\phi(z_2)\varpi(z_2) + \dots$$

est convergente pour toutes les valeurs de z prises dans le cercle C_x et définit, par suite, une fonction de z dans ce cercle. En effet, z étant un point du cercle C_x, on peut trouver un nombre ν assez grand pour que, sous la seule condition $n \geqq \nu$, on ait

$$|z_n - x| < \rho, \qquad |\phi(z_n)| \leqq k.$$

Partageons la série (1) en deux parties la première contenant les ν premiers termes, la seconde les autres

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\nu-1} \phi(z)\phi(z_1)\dots\phi(z_n)\varpi(z_n) + \sum_{n=\nu}^{n=\infty} \phi(z)\phi(z_1)\dots\phi(z_n)\varpi(z_n).$$

La seconde partie contient en facteur $\phi(z)\phi(z_1)\dots\phi(z_{\nu-1})$ et peut s'écrire

$$\phi(z)\phi(z_1)\dots\phi(z_{\nu-1})\sum_{p=0}^{p=\infty} \phi(z_\nu)\phi(z_{\nu+1})\dots\phi(z_{\nu+p})\varpi(z_{\nu+p}),$$

série évidemment *convergente*, car le module de $\varpi(z_{\nu+p})$ restant inférieur à une limite fixe L puisque $\varpi(z)$ est holomorphe, et les modules des facteurs

$$\phi(z_\nu), \ \phi(z_{\nu+1}), \ \dots, \ \phi(z_{\nu+p})$$

étant tous inférieurs ou égaux au nombre k moindre que l'unité, le module du terme général sera moindre que

$$Lk^p$$

terme général d'une progression géométrique décroissante.

La fonction $F_1(z)$ existe donc dans tout le cercle C_x: elle vérifie la relation suivante qui résulte immédiatement de la forme du développement

$$(2) \qquad F_1[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)} F_1(z) - \varpi(z).$$

La série des dérivées des termes de $F_1(z)$ est aussi uniformément convergente dans tout le cercle C_x, comme on le verra en faisant un raisonnement analogue à celui que fait M. Koenigs pour des séries du même genre. On en conclut que la fonction $F_1(z)$ est *holomorphe* dans le cercle C_x. Ce fait se trouvera du reste vérifié *a posteriori* dans tous les cas que nous traiterons.

Complétons ces considérations en cherchant toutes les fonctions holomorphes ou méromorphes vérifiant la relation (2).

Soit $F(z)$ une autre fonction holomorphe ou méromorphe dans le cercle C_x vérifiant la même relation que $F_1(z)$

$$F[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)} F(z) - \varpi(z).$$

La différence $F(z) - F_1(z)$ vérifiera la relation

$$F[\varphi(z)] - F_1[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)}[F(z) - F_1(z)].$$

M. Koenigs a montré [1] qu'il existe une seule fonction holomorphe $G(z)$ vérifiant l'équation

$$G[\varphi(z)] = \frac{\psi(x)}{\psi(z)} G(z)$$

et qu'il n'existe aucune fonction méromorphe dans le cercle C_x vérifiant cette équation. Cette fonction $G(z)$ étant formée, on aura

$$\frac{F[\varphi(z)] - F_1[\varphi(z)]}{G[\varphi(z)]} = \frac{1}{\psi(x)} \frac{F(z) - F_1(z)}{G(z)},$$

ce qui montre que la fonction

$$\frac{F(z) - F_1(z)}{G(z)}$$

[1] Annales de l'Ecole normale, 1884, supplément p. 25 et 26.

est une solution méromorphe de l'équation fonctionnelle

$$\Xi[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(x)} \Xi(z)$$

dont M. Koenigs a donné toutes les solutions méromorphes et holomorphes dans le cercle C_x. D'après l'analyse de M. Koenigs (loc. cit. page 16), cette équation n'admet de solution holomorphe ou méromorphe dans le domaine du point x que si l'on a

$$\psi(x) = [\varphi'(x)]^n,$$

n désignant un entier positif ou négatif. Si l'on suppose cette condition remplie, la seule solution holomorphe ou méromorphe de l'équation fonctionnelle est

$$\alpha[B(z)]^{-n},$$

α étant une constante et $B(z)$ une fonction holomorphe dont M. Koenigs a donné l'expression et qui vérifie la relation

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x) B(z).$$

On a donc alors, pour expression générale de $F(z)$

$$F(z) = F_1(z) + \alpha G(z)[B(z)]^{-n}.$$

Cette fonction $B(z)$ est définie par M. Koenigs comme la limite vers laquelle tend le produit

$$\frac{\varphi_p(z) - x}{a^{p+1}}$$

quand p augmente indéfiniment, $\varphi_p(z)$ désignant l'opération $\varphi(z)$ répétée p fois. La dérivée $B'(z)$ est la limite du produit convergent

$$B'(z) = \prod_{i=0}^{i=\infty} \frac{\varphi'(z_i)}{a}.$$

S'il n'existe pas d'entier n vérifiant la relation

$$\psi(x) = [\varphi'(x)]^n,$$

l'équation

$$\Xi[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(x)} \Xi(z)$$

n'admet aucune solution holomorphe ou méromorphe au point x. Dans ce cas, il n'existe pas de fonction holomorphe ou méromorphe $F(z)$ autre que $F_1(z)$ vérifiant la relation

$$F[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'(z)} F(z) - \varpi(z).$$

Équations du second ordre.

4. Arrivons maintenant à l'objet principal de ce travail et prenons d'abord une équation linéaire et homogène du second ordre que l'on peut toujours supposer privée du second terme:

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0.$$

Kummer[1] et M. Brioschi[2] ont montré qu'en remplaçant z par $\varphi(z)$ et u par $u\sqrt{\varphi'(z)}$, l'équation reprend la même forme pourvu que $\varphi(z)$ vérifie la condition

$$f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2} f(z) + \frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4} \tag{3}$$

où $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ désignent les dérivées successives de $\varphi(z)$. Lorsque $f(z)$ est donnée, la détermination d'une solution $\varphi(z)$ de cette équation (3) est impossible dans la plupart des cas. Nous supposerons $\varphi(z)$ donné et nous chercherons à former une fonction $f(z)$ vérifiant la relation (3).

Supposons que l'on se donne une fonction $\varphi(z)$ remplissant toutes les conditions indiquées dans le numéro 2. Nous savons qu'au point limite x on a $|\varphi'(x)| < 1$, et nous supposons, comme plus haut que $\varphi'(x)$ est différent de zéro. Dans un certain cercle C_x de centre x et de rayon suffisamment petit, $\varphi'(z)$ restera différent de zéro et la fonction

$$\varpi(z) = \frac{3\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi'''}{4\varphi'^4} = \frac{1}{\varphi'^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)''$$

---

[1] Journal de Crelle, t. 15.

[2] Un résumé très-succinct des importantes recherches de M. Brioschi se trouve dans les Comptes rendus, t. 93, p. 941.

sera holomorphe dans C_x. En écartant le cas où cette fonction serait identiquement nulle, on peut appliquer l'analyse du n° 3 en prenant pour $\psi(z)$ la fonction $[\varphi'(z)]^2$. D'après ce que nous avons vu, la série

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n)]^2 \varpi(z_n)$$

est convergente et définit une fonction holomorphe au point x vérifiant l'équation (3).

Si l'on prend pour la fonction $f(z)$ cette détermination particulière $f_1(z)$, l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf_1(z) = 0$$

aura son intégrale générale holomorphe au point x: soient $F_1(z)$ et $F_2(z)$ deux solutions holomorphes linéairement indépendantes: les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}} F_1[\varphi(z)], \qquad \frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}} F_2[\varphi(z)]$$

seront aussi des solutions holomorphes et l'on aura

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}} F_1[\varphi(z)] = a_1 F_1(z) + b_1 F_2(z),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}} F_2[\varphi(z)] = a_2 F_1(z) + b_2 F_2(z),$$

a_1, b_1, a_2, b_2 désignant des constantes. Si l'on fait

$$F(z) = \lambda_1 F_1(z) + \lambda_2 F_2(z)$$

on pourra déterminer les constantes λ_1 et λ_2 de telle façon que

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}} F[\varphi(z)] = AF(z), \tag{4}$$

A désignant une constante. Il existera donc une intégrale $F(z)$ et, en général, deux intégrales telles que $F(z)$, holomorphes au point x et vérifiant cette relation. Quelle sera l'expression analytique d'une de ces

intégrales? La fonction $B(z)$ de M. Koenigs (log. cit. page 16) vérifie l'équation

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x) B(z) = a B(z)$$

sa dérivée $B'(z)$ vérifie donc l'équation

$$\varphi'(z) B'[\varphi(z)] = \varphi'(x) B'(z) = a B'(z)$$

en posant

$$\varphi'(x) = a;$$

d'où

$$\sqrt{B'[\varphi(z)]} = \sqrt{\frac{a}{\varphi'(z)}} \sqrt{B'(z)}.$$

Comme $z = x$ est un zéro simple de $B(z)$, $B'(x)$ est différent de zéro et $\sqrt{B'(z)}$ est une fonction holomorphe au point x. Le produit

$$F(z) \sqrt{B'(z)}$$

sera donc *holomorphe* au point x et vérifiera la relation

$$F[\varphi(z)] \sqrt{B'[\varphi(z)]} = A \sqrt{a} F(z) \sqrt{B'(z)}.$$

Ce produit est donc nécessairement de la forme

$$C[B(z)]^n$$

où n est un entier positif ou nul, C une constante arbitraire. Quant à la constante A, elle est

$$A = a^{n - \frac{1}{2}}.$$

L'on a donc enfin, en laissant de côté le facteur constant C,

$$F(z) \sqrt{B'(z)} = [B(z)]^n$$

d'où

$$F(z) = \frac{[B(z)]^n}{\sqrt{B'(z)}}. \tag{5}$$

L'équation différentielle

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - u f_1(z) = 0$$

admettra donc une et, en général, deux intégrales de cette forme où il ne reste plus qu'à déterminer l'entier positif ou nul n. Pour cela exprimons que la fonction

$$u = [B(z)]^n [B'(z)]^{-\frac{1}{2}}$$

vérifie l'équation: nous aurons après réduction et en désignant les dérivées de B par B', B'',

$$f_1(z) = n(n-1)\frac{B'^2}{B^2} + \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

Cette relation doit être identique en z: or, pour $z = x$, tous les termes sont finis sauf $\frac{B'^2}{B^2}$ qui devient infini du second ordre. Il faut donc que ce terme disparaisse, c'est à dire que n ait une des deux valeurs 0 ou 1.

L'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf_1(z) = 0$$

aura donc les deux intégrales

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{B'(z)}}, \qquad u_2 = \frac{B(z)}{\sqrt{B'(z)}}.$$

Elle peut être regardée comme intégrée dans le domaine du point x.

Remarque. Comme le nombre entier désigné ci-dessus par n est égal à 1 ou à 0, la fonction $f_1(z)$ vérifie l'identité

$$f_1(z) = \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

Proposons nous de démontrer directement cette identité sans nous servir de l'équation différentielle. Posons

$$\Pi(z) = \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}$$

et calculons la valeur $\Pi(z_1)$ que prend cette fonction quand on y remplace z par $\varphi(z)$. Désignons pour abréger par B_1', B_1'', B_1''' les valeurs $B(z_1)$, $B'(z_1)$, $B''(z_1)$. Comme on a

$$B' = \frac{\varphi'}{\alpha} B_1'$$

d'après la propriété fondamentale de la fonction $B(z)$

$$B[\varphi(z)] = aB(z),$$

on aura en dérivant les deux membres par rapport à z

$$\frac{B''}{B'} = \frac{\varphi''}{\varphi'} + \varphi' \frac{B_1''}{B_1'}$$

$$\frac{B'''}{B'} - \left(\frac{B''}{B'}\right)^2 = \frac{\varphi'''}{\varphi'} - \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 + \varphi'' \frac{B_1''}{B_1'} + \varphi'^2 \left[\frac{B_1'''}{B_1'} - \left(\frac{B_1''}{B_1'}\right)^2\right].$$

Portant ces valeurs de $\frac{B'''}{B'}$ et $\frac{B''}{B'}$ dans l'expression de $\Pi(z)$, on trouve après réductions

$$\Pi(z) = \varphi'^2\left[\frac{3}{4}\frac{B_1''^2}{B_1'^2} - \frac{1}{2}\frac{B_1'''}{B_1'}\right] + \frac{3}{4}\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2} - \frac{1}{2}\frac{\varphi'''}{\varphi'}.$$

Comme nous avons posé plus haut

$$\varpi(z) = \frac{3\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi'''}{4\varphi'^4},$$

on aura

$$\frac{\Pi(z)}{[\varphi'(z)]^2} = \Pi(z_1) + \varpi(z).$$

En vertu de cette identité, il est aisé de former la somme de la série

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n)]^2\varpi(z_n)$$

qui définit $f_1(z)$. L'identité ci dessus donne on changeant z en z_n et par suite $z_1 = \varphi(z)$ en z_{n+1}

$$\varpi(z_n) = \frac{\Pi(z_n)}{[\varphi'(z_n)^2]} - \Pi(z_{n+1}).$$

D'après cela le terme générale v_n de la série $f_1(z)$ peut s'écrire

$$v_n = [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_{n-1})]^2\Pi(z_n) - [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n)]^2\Pi(z_{n+1})$$

expression de la forme

$$v_n = w_n - w_{n+1}$$

en faisant

$$w_n = [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_{n-1})]^2\Pi(z_n).$$

La somme S_n des n premiers termes sera donc

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = w_0 - w_{n+1}.$$

Comme w_{n+1} tend vers zéro pour n infini, la somme S_n tend vers la la limite w_0; on a donc

$$f_1(z) = w_0 = \Pi(z) = \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

C'est bien l'identité que nous voulions vérifier.

On pourrait encore un peu simplifier cette analyse en remarquant que l'équation

$$\varphi'(z) = a\frac{B'(z)}{B'(z_1)},$$

donne

$$\varphi'(z_n) = a\frac{B'(z_n)}{B'(z_{n+1})},$$

d'où

$$\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n) = a^{n+1}\frac{B'(z)}{B'(z_{n+1})}.$$

5. Nous avons vu dans le paragraphe 3 que si $\psi(x)$ n'est pas de la forme

$$\psi(x) = [\varphi'(x)]^n, \quad (n \text{ entier})$$

il n'existe pas de fonction holomorphe ou méromorphe autre que $F_1(z)$ vérifiant l'équation

$$(2) \qquad F[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)}F(z) - \varpi(z).$$

Si au contraire

$$\psi(x) = [\varphi'(x)]^n$$

le fonction méromorphe la plus générale vérifiant la relation considérée est $F_1(z) + \alpha G(z)[B(z)]^{-n}$, $G(z)$ étant une fonction holomorphe telle que

$$G[\varphi(z)] = \frac{\psi(x)}{\psi(z)}G(z)$$

et α désignant une constante. Or, dans l'application que nous venons de faire à l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf_1(z) = 0,$$

nous avons formé une fonction $f_1(z)$ holomorphe au point x vérifiant la relation

$$f_1[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2(z)} f_1(z) - \varpi(z)$$

de la forme (2) ci-dessus où

$$\psi(z) = [\varphi'(z)]^2.$$

La condition

$$\psi(x) = [\varphi'(x)]^n$$

est donc vérifiée pour $n = 2$; la fonction $G(z)$ est $[B'(z)]^2$, et la fonction la plus générale méromorphe au point x vérifiant la relation

$$f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2} f(z) - \varpi(z),$$

est

$$f(z) = f_1(z) + \alpha \left[\frac{B'(z)}{B(z)} \right]^2.$$

L'équation du second ordre la plus générale remplissant les conditions que nous imposons à nos équations est donc

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0,$$

$f(z)$ ayant la forme que nous venons de trouver. Nous allons intégrer cette équation. La fonction $B(z)$ admettant le point limite $z = x$ pour zéro simple, la fonction $f(z)$ admettra ce point pour pôle double et, dans le voisinage de $z = x$, la partie principale de $f(z)$ sera $\frac{\alpha}{(z-x)^2}$. L'intégrale générale de l'équation linéaire est donc *régulière* au point x, suivant les expressions usitées dans la théorie des équations linéaires. L'équation fondamentale déterminante est

$$r(r-1) - \alpha = 0;$$

supposons ses racines distinctes et supposons que leur différence n'est pas un nombre entier. Si l'une de ces racines est r, l'autre sera $1 - r$ et, dans le domaine du point x, l'intégrale génerale de l'équation sera de la forme

$$u(z) = \lambda_1(z - x)^r g_1(z) + \lambda_2(z - x)^{1-r} g_2(z),$$

$g_1(z)$ et $g_2(z)$ étant deux fonctions holomorphes dans le domaine du point x et ne s'annulant pas en ce point. (Voyez les recherches de M. Fuchs ou le Mémoire de M. Tannery, Annales de l'Ecole normale, 1875, p. 165.) L'équation différentielle ne changeant pas quand on remplace z par $\varphi(z)$ et u par $u\sqrt{\varphi'(z)}$, admettra aussi dans le domaine du point x l'intégrale générale

$$U = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}} u[\varphi(z)] = \lambda_1 \frac{[\varphi(z) - x]^r g_1[\varphi(z)]}{\sqrt{\varphi'(z)}} + \lambda_2 \frac{[\varphi(z) - x]^{1-r} g_2[\varphi(z)]}{\sqrt{\varphi'(z)}}$$

que l'on peut écrire

$$\lambda_1(z - x)^r G_1(z) + \lambda_2(z - x)^{1-r} G_2(z)$$

avec

$$G_1(z) = \left[\frac{\varphi(z) - x}{z - x}\right]^r \frac{g_1[\varphi(z)]}{\sqrt{\varphi'(z)}}, \qquad G_2(z) = \left[\frac{\varphi(z) - x}{z - x}\right]^{1-r} \frac{g_2[\varphi(z)]}{\sqrt{\varphi'(z)}},$$

ces nouvelles fonctions G_1 et G_2 étant, ainsi que les premières g_1 et g_2, holomorphes au point x et différentes de zéro en ce point. Les deux formes u et U de l'intégrale générale devant être identiques, on a

$$G_1(z) = k_1 g_1(z), \qquad G_2(z) = k_2 g_2(z),$$

k_1 et k_2 désignant des constantes. On a donc

$$[\varphi(z) - x]^r g_1[\varphi(z)] = k_1 \sqrt{\varphi'(z)} [z - x]^r g_1(z),$$

$$[\varphi(z) - x]^{1-r} g_2[\varphi(z)] = k_2 \sqrt{\varphi'(z)} [z - x]^{1-r} g_2(z).$$

On en conclut que les deux intégrales particulières

$$F_1(z) = (z - x)^r g_1(z), \qquad F_2(z) = (z - x)^{1-r} g_2(z)$$

vérifient les deux équations

$$F_1[\varphi(z)] = k_1 \sqrt{\varphi'(z)} F_1(z), \qquad F_2[\varphi(z)] = k_2 \sqrt{\varphi'(z)} F_2(z).$$

Comme la fonction $B(z)$ de M. Koenigs admet le zéro simple $z = x$ et vérifie la relation

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x) B(z)$$

d'où

$$B'[\varphi(z)] = \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(z)} B'(z),$$

le rapport

$$\frac{[B(z)]^r}{\sqrt{B'(z)}}$$

est, dans le voisinage du point x, égal à $(z-x)^r$ multiplié par une fonction holomorphe et vérifie la relation

$$\frac{[B[\varphi(z)]]^r}{\sqrt{B'[\varphi(z)]}} = a^{r-\frac{1}{2}} \sqrt{\varphi'(z)} \frac{[B(z)]^r}{\sqrt{B'(z)}}$$

où on a posé $\varphi'(x) = a$. La fonction

$$\Phi_1(z) = \frac{F_1(z)\sqrt{B'(z)}}{[B(z)]^r}$$

est donc holomorphe au point x et vérifie la relation

$$\Phi_1[\varphi(z)] = k_1 a^{\frac{1}{2}-r} \Phi_1(z);$$

elle est, d'après le théorème de M. Koenigs déjà cité, de la forme $[B(z)]^n$, n désignant un entier *positif* ou *nul*. Mais comme cette fonction $\Phi_1(z)$ ne s'annule pas au point x et que $B(z)$ admet le zéro simple $z = x$, il faut prendre $n = 0$. On trouve ainsi, pour l'intégrale $F_1(z)$ l'expression

$$F_1(z) = \frac{[B(z)]^r}{\sqrt{B'(z)}};$$

on trouve de même pour la seconde intégrale particulière

$$F_2(z) = \frac{[B(z)]^{1-r}}{\sqrt{B'(z)}}.$$

L'équation différentielle est donc intégrée.

En substituant ces fonctions F_1 et F_2 dans l'équation différentielle,

on montrera que l'équation est vérifiée par l'une et l'autre quelque soit r, *c'est à dire même en laissant de côté les suppositions faites sur* r, à l'aide de l'identité

$$f_1(z) = \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}$$

établie dans le numéro précédent.

Lorsque $r = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{4}$ ces deux intégrales sont identiques. On en obtiendra alors une nouvelle par la méthode connue qui consiste à remplacer l'une des intégrales par la différence des deux divisée par $r - \frac{1}{2}$:

$$\frac{[B(z)]^r - [B(z)]^{1-r}}{\left(r - \frac{1}{2}\right)\sqrt{B'(z)}}$$

puis à faire tendre r vers $\frac{1}{2}$. On trouve ainsi, pour $\alpha = -\frac{1}{4}$, les deux solutions

$$\sqrt{\frac{B(z)}{B'(z)}}, \qquad \sqrt{\frac{B(z)}{B'(z)}}\log B(z)$$

qu'il est aisé de vérifier d'après l'identité ci-dessus.

Remarque. Le résultat général que nous venons de trouver sur l'expression des intégrales de l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0$$

peut s'énoncer ainsi. En faisant le changement de fonction et de variable

$$u = \frac{v}{\sqrt{B'(z)}}, \qquad t = B(z)$$

on transformera l'équation en une autre dont l'intégrale générale sera

$$c_1 e^{rt} + c_2 e^{(1-r)t}$$

et qui, par suite, aura la forme élémentaire:

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \alpha v = 0$$

à coefficients constants.

6. Dans ce qui précède, nous avons supposé que la fonction

$$\varpi(z) = \frac{3\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi'''}{4\varphi'^4} = \frac{1}{\varphi'^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)''$$

n'est pas *identiquement nulle;* pour qu'elle le soit, il faut et il suffit que $\varphi(z)$ soit le quotient de deux fonctions linéaires en z

$$z_1 = \varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

a, b, c, d *constants.* On sait et il est facile de vérifier que, si l'équation du second degré

$$z - \varphi(z) = 0$$

a ses deux racines x et x' distinctes, la relation entre z et z_1 peut s'écrire

$$\frac{z_1 - x}{z_1 - x'} = K\frac{z - x}{z - x'},$$

K désignant une constante. La dérivée $\varphi'(x)$ est égale à K; il faut donc supposer $|K| < 1$. Alors, il est évident que le point x est un point limite pour la substitution

$$z_1 = \varphi(z);$$

le deuxième point x' serait limite pour la substitution inverse. D'après M. Koenigs,[1] la fonction $B(z)$ est dans le cas actuel

$$B(z) = \frac{z - x}{z - x'}$$

et l'équation ci-dessus entre z et z_1 exprime la propriété

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x)B(z)$$

puisque

$$\varphi'(x) = K.$$

Dans ce cas particulier la fonction appelée précédemment $f_1(z)$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n)]^2\varpi(z_n)$$

---

[1] Annales de l'Ecole normale, 1884, supplément page 24.

est identiquement nulle, et la fonction $f(z)$ devient

$$f(z) = f_1(z) + \alpha \frac{B'^2}{B^2} = \alpha \left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-x'} \right]^2.$$

L'équation différentielle

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - uf(z) = 0$$

devient

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \alpha \left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-x'} \right]^2 u = 0,$$

elle admet les deux intégrales

$$u_1 = \frac{B^r(z)}{\sqrt{B'(z)}}, \qquad u_2 = \frac{B^{1-r}(z)}{\sqrt{B'(z)}}$$

où r et $1-r$ sont les racines supposées distinctes de l'équation $r(r-1) = \alpha$. Ces deux intégrales sont, en négligeant des facteurs constants

$$u_1 = \frac{(z-x)^r}{(z-x')^{r-1}}, \qquad u_2 = \frac{(z-x)^{1-r}}{(z-x')^{-r}},$$

ce qui est bien connu.[1] Si $r = \frac{1}{2}$, on aura les deux intégrales

$$u_1 = \sqrt{(z-x)(z-x')}, \qquad u_2 = u_1 \log \frac{z-x}{z-x'}.$$

Ce sont là des vérifications élémentaires de la méthode générale.

Si les points limites x et x' étaient des points singuliers essentiels de la fonction $f(z)$, les considérations précédentes ne s'appliqueraient plus. On obtiendrait alors une fonction $f(z)$ vérifiant la relation

$$f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2(z)} f(z)$$

où

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

en prenant une fonction thétafuchsienne de M. Poincaré. On serait

[1] Voir une Note de M. Besge, Journal de Liouville, 1ère série, t. 9, p. 336.

ainsi conduit à des questions se rattachant à un ordre d'idées entièrement différent de celui que nous avons adopté dans ce mémoire.

Si les deux racines x et x' de l'équation $z = \varphi(z)$

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

sont égales, $x' = x$, la substitution $z_1 = \varphi(z)$ peut s'écrire, comme il est connu

$$\frac{1}{z_1 - x} = \frac{1}{z - x} + C.$$

Dans ce cas x est encore un point limite, mais notre méthode ne s'applique plus car $\varphi'(x) = 1$ et nous supposons $|\varphi'(x)| < 1$.

Néammoins l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \alpha\left(\frac{1}{z - x} - \frac{1}{z - x'}\right)^2 u = 0$$

dont nous venons de trouver l'intégrale conduit comme cas limite à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{ku}{(z - x)^4} = 0.$$

Il suffit de poser

$$\alpha = \frac{k}{(x - x')^2}, \qquad r = \frac{\rho}{x - x'};$$

quand x' tend vers x, l'équation

$$r(r - 1) = \alpha$$

devient

$$\rho^2 = k$$

et l'intégrale

$$(z - x)\left(\frac{z - x'}{z - x}\right)^r = (z - x)\left[1 + \frac{x - x'}{z - x}\right]^{\frac{\rho}{x - x'}}$$

devient

$$(z - x)e^{\frac{\rho}{z - x}}, \qquad \rho = \pm\sqrt{k}.$$

Ce cas a été traité par SPITZER, *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, p. 98.

Ces dernières équations rentrent également dans le type d'équations différentielles linéaires binômes que nous avons étudié dans les Annales de l'Ecole normale (janvier 1883).

7. Si nous revenons un instant au cas général, nous pouvons faire cette remarque que l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0$$

conserve la même forme non seulement pour la substitution

$$u = v[\varphi'(z)]^{-\frac{1}{2}}, \qquad t = \varphi(z),$$

mais encore pour une infinité de substitutions du même genre.

En effet le coefficient $f(z)$ s'exprime comme nous l'avons vu en fonction rationnelle de la fonction $B(z)$ et de ses dérivées. Il restera donc le même si l'on altère la fonction $\varphi(z)$ de telle manière que la fonction $B(z)$ ne soit pas altérée. Or cela est possible d'une infinité de manières, comme l'a montré M. KOENIGS dans ses *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles*, (Annales de l'Ecole normale, novembre 1885). M. KOENIGS a démontré que l'équation

$$B(Z) = kB(z)$$

dans laquelle k est une constante et $|k| < 1$ définit Z comme une fonction de z holomorphe dans le domaine de point x et se réduisant à x pour $z = x$. Soit $Z = \Phi(z, k)$ cette fonction; elle admet le point x comme point limite et sa dérivée $\Phi'(x, k)$ au point x a pour valeur k. On en conclut que toutes les fonctions $\Phi(z, k)$ où $|k| < 1$ donnent naissance à la même fonction $B(z)$ et que ce sont les seules fonctions jouissant de cette propriété. La fonction $\Phi(z, a)$ n'est autre chose que $\varphi(z)$.

En résumé, l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0$$

est transformable en elle-même par toutes les substitutions

$$u = v[\Phi'(z, k)]^{-\frac{1}{2}}, \qquad t = \Phi(z, k),$$

où k est une constante de module plus petit que l'unité. Ces substitutions forment, d'après les dénominations de M. S. Lie, un groupe continu de transformations.

C'est là qu'on peut trouver la raison de ce fait que l'équation est réductible à une autre à coefficients constants; car si l'on pose

$$Z = \log B(z), \qquad u = \left[\frac{B'(z)}{B(z)}\right]^{-\frac{1}{2}} U$$

on obtient une équation entre U et Z qui ne change pas quand, sans changer de fonction, on remplace Z par $Z + \log k$. Les coefficients de cette équation devront donc admettre la période $\log k$ et, comme k est arbitraire, ces coefficients seront des constantes.

Équations du troisième ordre.

8. Nous allons montrer rapidement que la même méthode avec les mêmes conséquences s'applique aux équations du troisième ordre dont les coefficients sont méromorphes au point limite x.

Soit

$$\frac{d^3u}{dz^3} - 4\frac{du}{dz} f(z) - 4ug(z) = 0$$

une équation de troisième ordre que l'on peut toujours supposer privée de second terme par un changement de fonction. Faisons le changement de fonction

$$u = v\lambda(z)$$

et de variable

$$t = \varphi(z), \qquad \frac{dt}{dz} = \varphi'(z);$$

nous aurons en désignant par u, u', u'', u''' les dérivées de u par rapport à z et par v, v', v'', v''' les dérivées de v par rapport à t, les formules

$$u = v\lambda,$$

$$u' = v\lambda' + v'\lambda\varphi',$$

$$u'' = v\lambda'' + v'(\lambda\varphi'' + 2\lambda'\varphi') + v''\lambda\varphi'^2,$$

$$u''' = v\lambda''' + v'(\lambda\varphi''' + 3\lambda'\varphi'' + 3\lambda''\varphi') + 3v''\varphi'(\lambda\varphi'' + \lambda'\varphi') + v'''\lambda\varphi'^3.$$

Supposons que l'on puisse déterminer λ et φ de façon que l'équation différentielle reprenne la même forme, avec cette seule différence que u sera remplacé par v et z par t. Le coefficient de v'' devant être nul on aura

$$\lambda\varphi'' + \lambda'\varphi' = 0, \qquad \lambda = \frac{1}{\varphi'(z)}$$

en particularisant la constante d'intégration, ce qui ne particularise pas la détermination des fonctions λ et φ, car deux déterminations de λ qui ne diffèrent que par un facteur constant doivent être regardées comme identiques. On devra avoir ensuite, en écrivant que le coefficient de v' est $-4f(t)$ ou $-4f[\varphi(z)]$ et celui de v, $-4g(t)$ ou $-4g[\varphi(z)]$:

$$-4f[\varphi(z)] = \frac{-4\lambda\varphi' f(z) + \lambda\varphi''' + 3\lambda'\varphi'' + 3\lambda''\varphi'}{\lambda\varphi'^3},$$

$$-4g[\varphi(z)] = \frac{-4\lambda g(z) - 4\lambda' f(z) + \lambda'''}{\lambda\varphi'^3}$$

ou en remplaçant λ par sa valeur $\frac{1}{\varphi'}$ et réduisant

(a) $$f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2}f(z) + \frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4},$$

(b) $$g[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^3}g(z) - \frac{\varphi''}{\varphi'^4}f(z) - \frac{1}{4\varphi'^2}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)'''.$$

Pour que la transformation soit possible, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\varphi(z)$ autre que z vérifiant ces deux conditions.

La première relation (a) étant identique à celle que nous avons rencontrée dans l'étude de l'équation du second ordre, la fonction $f(z)$ la plus générale vérifiant cette relation sera, comme nous avons vu

$$f(z) = f_1(z) + \alpha\left[\frac{B'(z)}{B(z)}\right]^2,$$

$f_1(z)$ étant une fonction holomorphe dont nous avons donné deux expressions.

La fonction $f(z)$ étant ainsi déterminée, il reste à déterminer la fonction $g(z)$ par la condition (b) dans le second membre de laquelle figure la fonction $f(z)$ qui n'est pas holomorphe au point x mais admet ce point pour pôle de second degré.

Rappelons nous que la fonction $B(z)$ admet le point x pour zéro simple et vérifie la relation

$$B[\varphi(z)] = \varphi'(x) B(z) = aB(z)$$

en faisant $\varphi'(x) = a$.

Multiplions le premier membre de la relation (b) par $B^2[\varphi(z)]$ et le second membre par la fonction identique $a^2B^2(z)$, nous aurons

$$g[\varphi(z)] B^2[\varphi(z)] = \frac{a^2}{\varphi'^3} g(z) B^2(z) - \frac{a^2\varphi''}{\varphi'^4} f(z) B^2(z) - \frac{a^2}{4\varphi'^2}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)''' B^2(z).$$

ou en posant

$$F(z) = g(z) B^2(z),$$

$$\chi(z) = \frac{a^2\varphi''}{\varphi'^4} f(z) B^2(z) + \frac{a^2}{4\varphi'^2}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)''' B^2(z),$$

$$\text{(d)} \qquad F[\varphi(z)] = \frac{a^2}{\varphi'^3} F(z) - \chi(z)$$

où la fonction $\chi(z)$ est holomorphe au point x, car le produit $f(z)B^2(z)$ l'est. Cette dernière équation (d) rentre dans le type d'équations fonctionnelles traitées au paragraphe (3)

$$F[\varphi(z)] = \frac{1}{\psi(z)} F(z) - \varpi(z)$$

où

$$\psi(z) = \frac{\varphi'^3}{a^2}, \qquad \varpi(z) = \chi(z).$$

On obtient une solution particulière de cette équation à l'aide de la série

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{[\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_n)]^3}{a^{2n+2}} \chi(z_n) = B'^3(z) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a^{n+1}\chi(z_n)}{B'^3(z_{n+1})};$$

série convergente car, la quantité $\psi(x)$ étant égale à a ou à $\varphi'(x)$, le module de $\psi(x)$ est moindre que l'unité. Comme

$$\psi(x) = \varphi'(x)$$

la fonction holomorphe ou méromorphe la plus générale vérifiant l'équation fonctionnelle est

$$F(z) = F_1(z) + \beta\frac{G(z)}{B(z)}$$

β désignant une constante arbitraire et $G(z)$ une fonction holomorphe au point x vérifiant la relation

$$G[\varphi(z)] = \frac{\psi(x)}{\psi(z)}G(z), \qquad G[\varphi(z)] = \left[\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(z)}\right]^3 G(z).$$

Cette fonction est actuellement $[B'(z)]^3$ et l'on a

$$F(z) = F_1(z) + \beta\frac{B'^3}{B}$$

en écrivant B, B', ... au lieu de $B(z)$, $B'(z)$, ... Comme on a posé

$$F(z) = g(z)B^2,$$

on a enfin, pour l'expression de $g(z)$:

$$g(z) = \frac{F_1(z)}{B^2} + \beta\left(\frac{B'}{B}\right)^3$$

que nous rapprocherons de celle de $f(z)$

$$f(z) = f_1(z) + \alpha\left(\frac{B'}{B}\right)^2.$$

$f(z)$ admet le point x comme pôle du second ordre et $g(z)$ admet ce point comme pôle du troisième ordre; les parties principales de $f(z)$ et $g(z)$ dans le voisinage de $z = x$ sont respectivement

$$\frac{\alpha}{(z-x)^2}, \quad \frac{\beta}{(z-x)^3}.$$

9. En adoptant ces déterminations de $f(z)$ et $g(z)$, intégrons maintenant l'équation que nous avons écrite

$$\frac{d^3u}{dz^3} - 4\frac{du}{dz}f(z) - 4ug(z) = 0$$

dans le domaine C_x du point x. L'intégrale générale sera régulière dans le domaine du point x: elle sera composée linéairement avec les trois intégrales particulières

$$u_1(z) = (z-x)^{r_1}h_1(z), \qquad u_2(z) = (z-x)^{r_2}h_2(z),$$
$$u_3(z) = (z-x)^{r_3}h_3(z),$$

h_1, h_2, h_3 désignant trois fonctions de z holomorphes au point x et r_1, r_2, r_3 les racines de l'équation fondamentale déterminante

$$r(r-1)(r-2) - 4\alpha r - 4\beta = 0$$

supposées distinctes et telles qu'aucune des différences $r_1 - r_2$, $r_2 - r_3$, $r_3 - r_1$ ne soit un nombre entier. On sait en outre d'après M. Fuchs que, dans cette hypothèse, les fonctions holomorphes $h_1(z)$, $h_2(z)$, $h_3(z)$ ne s'annulent pas au point x.[1] L'équation différentielle reprenant la même forme quand on fait

$$u = \frac{v}{\varphi'(z)}, \qquad t = \varphi(z),$$

la nouvelle équation entre v et t admet les trois intégrales

$$(t-x)^{r_1}h_1(t), \ (t-x)^{r_2}h_2(t), \ (t-x)^{r_3}h_3(t),$$

d'où l'on déduit pour l'équation u les trois intégrales

$$\frac{[\varphi(z)-x]^{r_1}h_1[\varphi(z)]}{\varphi'(z)}, \ \frac{[\varphi(z)-x]^{r_2}h_2[\varphi(z)]}{\varphi'(z)}, \ \frac{[\varphi(z)-x]^{r_3}h_3[\varphi(z)]}{\varphi'(z)}.$$

Comme $\varphi(z) - x$ admet le zéro simple $z = x$, les quantités $[\varphi(z)-x]^{r_i}$ sont de la forme

$$(z-x)^{r_i}\left[\frac{\varphi(z)-x}{z-x}\right]^{r_i}$$

[1] Voir par exemple Tannery, Annales de l'École normale, 1875, p. 165.

où le second facteur est holomorphe au point x; les trois nouvelles intégrales ci-dessus sont donc de la forme

$$(z-x)^{r_1} H_1(z)\,,\ (z-x)^{r_2} H_2(z)\,,\ (z-x)^{r_3} H_3(z),$$

$H_1(z)$, $H_2(z)$, $H_3(z)$ étant de fonctions de z holomorphes et non nulles au point x. Comme les premières intégrales $u_1(z)$, $u_2(z)$, $u_3(z)$ sont de cette même forme, elle sont identiques aux nouvelles à des facteurs constants près, et l'on a

$$\frac{[\varphi(z)-x]^{r_1} h_1[\varphi(z)]}{\varphi'(z)} = k_1 (z-x)^{r_1} h_1(z)$$

c'est à dire

$$u_1[\varphi(z)] = k_1 \varphi'(z) u_1(z)$$

de même

$$u_2[\varphi(z)] = k_2 \varphi'(z) u_2(z),$$

$$u_3[\varphi(z)] = k_3 \varphi'(z) u_3(z).$$

k_1, k_2, k_3 étant dês constantes. La fonction $B(z)$ admet le zéro simple $z=x$ et vérifie l'équation

$$B[\varphi(z)] = aB(z), \qquad a = \varphi'(x)$$

d'où

$$B'[\varphi(z)] = \frac{a}{\varphi'(z)} B(z);$$

la fonction

$$\Phi(z) = \frac{u_1(z) B'(z)}{[B(z)]^{r_1}},$$

est donc holomorphe et *différente de zéro* au point x, et vérifie la relation

$$\Phi[\varphi(z)] = k_1 a^{1-r_1} \Phi(z).$$

D'après M. Koenigs, les seules solutions holomorphes ou méromorphes de cette équation sont de la forme

$$\lambda B^n(z)$$

où n est un entier positif, négatif, ou nul. La fonction $\Phi(z)$ étant ho-

lomorphe au point x et ne pouvant pas s'annuler au point x, cet entier n est nul, $\Phi(z)$ est une constante, et $k_1 a^{1-r_1}$ est égal à l'unité. On aura donc, en négligeant un facteur constant

$$u_1(z) = \frac{[B(z)]^{r_1}}{B'(z)};$$

on trouvera de même

$$u_2(z) = \frac{[B(z)]^{r_2}}{B'(z)}, \qquad u_3(z) = \frac{[B(z)]^{r_3}}{B'(z)}.$$

L'équation différentielle peut donc être considérée comme intégrée dans le domaine du point x.

La notion de continuité permettra d'affirmer que ces trois fonctions sont encore des intégrales linéairement indépendantes, quand les racines r_1, r_2, r_3 restant distinctes, certaines des différences

$$r_1 - r_2, \; r_2 - r_3, \; r_3 - r_1$$

deviennent des nombres entiers.

On passe du cas général où les trois racines sont distinctes, au cas où deux ou trois deviennent égales par un procédé bien connu que nous avons employé pour l'équation du second ordre et sur lequel il est inutile d'insister.

10. La forme que nous venons de trouver pour l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^3u}{dz^3} - 4\frac{du}{dz}f(z) - 4ug(z) = 0$$

montre que si l'on fait le changement de fonction et de variable

$$u = \frac{v}{B'(z)}, \qquad B(z) = e^t,$$

l'intégrale générale de l'équation en v est

$$C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + C_3 e^{r_3 t},$$

et par suite cette équation en v prend la forme élémentaire

$$\frac{d^3v}{dt^3} - 4\alpha\frac{dv}{dt} - 4\beta v = 0,$$

à coefficients constants. Il serait aisé de vérifier toutes ces conséquences en supposant

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

comme nous l'avons fait au n° 6 pour l'équation du second ordre. L'une des équations dont nos formules donnent l'intégrale dans cette hypothèse est l'équation

$$\frac{d^3u}{dz^3} - \beta\left[\frac{1}{z - x} - \frac{1}{z - x'}\right]^3 u = 0$$

déjà intégrée par HALPHEN (Mémoire Couronné, Savants Etrangers, t. 27, p. 143).

11. Si l'on exprime que les intégrales que nous venons de trouver vérifient l'équation différentielle

$$\frac{d^3u}{dz^3} - 4\frac{du}{dz}f(z) - 4ug(z) = 0,$$

on obtiendra les expressions des fonctions $f(z)$ et $g(z)$ à l'aide de la fonction $B(z)$ et de ses dérivées. La fonction $f(z)$ a déjà été exprimée antérieurement; on a

$$f(z) = f_1(z) + \alpha\left(\frac{B'}{B}\right)^2$$

où

$$f_1(z) = \frac{3}{4}\left(\frac{B''}{B'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

Quant à $g(z)$, on peut également l'exprimer directement à l'aide de la fonction B en faisant la somme de la série qui donne $g_1(z)$ par une méthode analogue à celle que nous avons suivie pour la série $f_1(z)$, ou mieux comme il suit. Les fonctions f et g sont assujetties à vérifier les deux relations

$$f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2}f(z) + \frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4},$$

$$g[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^3}g(z) + \frac{\varphi''}{\varphi'^4}f(z) - \frac{1}{4\varphi'^2}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)'''.$$

Introduisons l'invariant de MM. LAGUERRE et BRIOSCHI

$$g(z) - \frac{1}{2}f'(z);$$

nous avons en différentiant la première relation

$$f'[\varphi(z)]\varphi' = \frac{1}{\varphi'^2}f'(z) - \frac{2\varphi''}{\varphi'^3}f(z) + \left(\frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4}\right)'.$$

Formant la différence

$$g[\varphi(z)] - \frac{1}{2}f'[\varphi(z)]$$

on trouve

$$g[\varphi(z)] - \frac{1}{2}f'[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^3}\left[g(z) - \frac{1}{2}f'(z)\right];$$

les autres termes disparaissent, comme on le vérifiera sans peine en effectuant les différentiations.

La différence

$$g(z) - \frac{1}{2}f'(z)$$

est donc une solution de l'équation fonctionnelle

$$\Xi[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^3}\Xi(z)$$

admettant le point limite x comme pôle d'ordre 3, car $f(z)$ admet ce point comme pôle d'ordre 2. D'après M. KOENIGS la seule fonction Ξ remplissant ces conditions est

$$\gamma\left(\frac{B'}{B}\right)^3,$$

γ désignant une constante.

On a donc

$$g(z) = \frac{1}{2}f'(z) + \gamma\left(\frac{B'}{B}\right)^3$$

d'où, d'après l'expression de $f(z)$

$$g(z) = \frac{1}{2}f_1'(z) + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \gamma\left(\frac{B'}{B}\right)^3,$$

$$g(z) = \frac{1}{2}f_1'(z) + \alpha\frac{B'B''}{B^2} + \beta\left(\frac{B'}{B}\right)^3$$

avec

$$\beta = \gamma - \alpha;$$

sous cette dernière forme la partie principale de $g(z)$ dans le voisinage du pôle x est

$$\beta \frac{1}{(z-x)},$$

comme il doit arriver.

En partant de ces deux expressions de f et g jointes à celles de $f_1(z)$, on pourra aisément vérifier que les trois intégrales trouvées satisfont à l'équation différentielle.

Les coefficients de l'équation $f(z)$ et $g(z)$ étant des fonctions rationnelles de $B(z)$ et de ses dérivées, l'équation ne change pas non seulement quand on fait

$$u = \frac{v}{\varphi'(z)}, \qquad t = \varphi(z)$$

mais quand on fait la substitution plus générale

$$u = \frac{v}{\Phi'(z, k)}, \qquad t = \Phi(z, k),$$

comme nous l'avons vu pour les équations du second ordre.

Équations d'ordre quelconque.

12. Soit une équation d'ordre q que nous écrivons comme Halphen, avec les coefficients du binôme

$$\frac{d^q u}{dz^q} + \frac{q(q-1)}{1.2} P_2(z) \frac{d^{q-2}u}{dz^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} P_3(z) \frac{d^{q-3}u}{dz^{q-3}} +$$

$$\ldots + qP_{q-1}(z)\frac{du}{dz} + P_q(z)u = 0$$

en admettant qu'on aît fait disparaître le second terme par un changement de fonction.

Supposons que cette équation reprenne la même forme quand on fait

$$u = v\lambda(z), \qquad t = \varphi(z)$$

c'est à dire devienne

$$\frac{d^q v}{dt^q} + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} P_2(t) \frac{d^{q-2} v}{dt^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} P_3(t) \frac{d^{q-3} v}{dt^{q-3}} +$$

$$\ldots + \frac{q}{1} P_{q-1}(t) \frac{dv}{dt} + P_q(t) v = 0.$$

Un calcul facile montre que pour faire disparaître le second terme dans l'équation en v, il faut prendre

$$\lambda(z) = [\varphi'(z)]^{\frac{1-q}{2}}.$$

Une fois $\lambda(z)$ déterminé, on aura par les formules générales données par Halphen dans son Mémoire couronné les expressions des fonctions $P_2(t)$, $P_3(t), \ldots, P_q(t)$ c'est à dire de $P_2[\varphi(z)], P_3[\varphi(z)], \ldots, P_q[\varphi(z)]$ en fonction linéaire de $P_2(z), P_3(z), \ldots, P_q(z)$, les coefficients de ces expressions contenant les dérivées de $\varphi(z)$. A l'aide de ces relations et en s'appuyant sur l'analyse du n° 3, on pourra de proche en proche former les expressions les plus générales des fonctions $P_2(z), P_3(z), \ldots, P_q(z)$ sous la condition que ces fonctions soient méromorphes au point limite x. La première fonction $P_2(z)$ ne différera que par un facteur constant de la fonction appelée $f(z)$ dans l'étude des équations du second et du troisième ordre.

13. Mais il est plus simple d'avoir recours à la théorie des invariants. Prenons d'abord l'invariant V_3 d'Halphen (Mémoire couronné, Savants étrangers, t. 28, n° 1, p. 124 et suiv.) qui est actuellement

$$V_3(z) = 3P_2'(z) - 2P_3(z)$$

puisque P_1 est nul. Si l'on forme ce même invariant sur l'équation transformée on aura, en l'appelant v_3

$$v_3(t) = 3P_2'(t) - 2P_3(t) = V_3(t).$$

La relation

$$v_3 = \frac{1}{\varphi'^3} V_3$$

donne donc

$$V_3[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^3} V_3(z).$$

La fonction $V_3(z)$ étant méromorphe au point x, on aura nécessairement d'après les théorèmes de M. KOENIGS

$$V_3(z) = \alpha^3 \left[\frac{B'(z)}{B(z)}\right]^3,$$

α^3 étant une constante arbitraire. Tous les autres invariants rationnels et entiers par rapport aux coefficients et à leurs dérivées s'exprimeront de même par des puissances de $\frac{B'}{B}$ égales à leur poids. Par exemple, l'invariant qu'HALPHEN appelle Δ et qui forme le numérateur de l'invariant absolu h

$$\Delta = 27 V_3^2 P_2 + \frac{7(q+1)}{4} V_3'^2 - \frac{3(q+1)}{2} V_3 V_3''$$

étant de poids 8, on aura

$$\Delta[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^8} \Delta(z), \qquad \Delta = \beta\left(\frac{B'}{B}\right)^8,$$

β désignant une constante. Résolvant l'expression de Δ par rapport à P_2 on aura

$$27 P_2 = \frac{\Delta}{V_3^2} - \frac{(q+1)}{4}\left[7\left(\frac{V_3'}{V_3}\right)^2 - 6\frac{V_3''}{V_3}\right]$$

d'où, en remplaçant Δ et V_3 par leurs expressions

$$27 P_2 = \gamma\left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{9(q+1)}{4}\left[\frac{3B''^2}{B'^2} - 2\frac{B'''}{B'}\right],$$

γ étant une constante. On a ainsi l'expression générale du second coefficient P_2 et on peut vérifier, comme nous l'avons dit, que ce coefficient ne diffère que par un facteur constant de la fonction $f(z)$ trouvée plus haut

$$f(z) = \alpha\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \frac{3}{4}\frac{B''^2}{B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

Il est inutile de répéter encore une fois les raisonnements faits dans les cas particuliers $q = 2$, $q = 3$ pour trouver la forme de l'intégrale générale. Nous nous bornerons à montrer que l'équation différentielle peut être ramenée à avoir des coefficients constants. Pour cela, nous allons

démontrer que la *forme canonique* donnée par Halphen (loc. cit. p. 128) est à *coefficients constants.* En effet cette forme canonique étant

$$\frac{d^q v}{dt^q} + \frac{q(q-1)}{2}\frac{h}{3}\frac{d^{q-2}v}{dt^{q-2}} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt} - 1\right)\frac{d^{q-3}v}{dt^{q-3}}$$

$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} s_4 \frac{d^{q-4}v}{dt^{q-4}} + \ldots + s_q v = 0,$$

le coefficient h a pour expression

$$h = \frac{1}{9}\frac{\Delta}{V_3^{\frac{2}{3}}},$$

et, en vertu des valeurs ci-dessus de Δ et V_3, il est constant et égal à $\frac{\beta}{9\alpha^8}$. En général l'invariant absolu s_m a pour expression

$$s_m = \frac{1}{V_3^{\frac{4m}{3}}} t_m$$

où t_m est un invariant fonction *entière* des coefficients de l'équation proposée et de leurs dérivées. Comme le poids de cet invariant t_m est $4m$ on a

$$t_m = \delta \cdot \left(\frac{B'}{B}\right)^{4m}$$

où δ est une constante. L'on en conclut que s_m a la valeur constante

$$s_m = \frac{\delta}{\alpha^{4m}}.$$

Le théorème est donc démontré.

La transformation propre à ramener l'équation primitive à cette forme canonique où les coefficients sont constants est, d'après Halphen

$$\frac{dt}{dz} = V_3^{\frac{1}{3}} = \alpha\frac{B'(z)}{B(z)}, \qquad t = \alpha \log B(z),$$

$$v = u V_3^{\frac{q-1}{6}} e^{\int P_1 dz}, \qquad v = u\left(\frac{B'}{B}\right)^{\frac{q-1}{2}},$$

où nous négligeons un facteur constant dans l'expression de v.

Comme nous l'avons indiqué en détail pour le cas du second ordre, il existe encore ici une infinité de substitutions contenant un paramètre et transformant l'équation en elle-même.

Remarque. Lorsqu'on prend le cas particulier où

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

les équations que l'on obtient sont celles qui ont été intégrées par Halphen (Comptes rendus, t. 92, p. 779).

Équations non linéaires.

14. On peut étendre une partie des résultats précédents à des équations non linéaires; par exemple aux équations considérées par Abel,[1] par M. R. Liouville,[2] par M. Elliot,[3] par M. Rivereau,[4] et par nous-même.[5]

Ainsi, les équations homogènes mais non linéaires par rapport à la fonction inconnue u et à ses dérivées $\frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \ldots$, conservent la même forme quand on fait le changement de fonction et de variable

$$u = v\lambda(z), \qquad t = \varphi(z).$$

Il pourra arriver qu'un choix convenable des fonctions $\lambda(z)$ et $\varphi(z)$ les transforme en elles-mêmes. Si la fonction $\varphi(z)$ remplit les conditions supposées par M. Koenigs et si les coefficients de l'équations sont holomorphes ou méromorphes au point limite x, la considération des invariants permettra d'étendre à ces équations une notable partie des résultats précédents. C'est ce que l'on verifiera en suivant une méthode analogue à celle du § 13.

[1] Oeuvres, t. 2, p. 19 et 26.

[2] Comptes rendus, 1886 et 1887.

[3] Ibid. 1890, premier semestre.

[4] *Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées,* Thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris, 1890. Gauthier-Villars.

[5] Journal de mathématiques de M. Jordan, 4ième série, t. 5, 1889.

ZUR THEORIE DER LINEAREN DIFFERENZENGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

VON

HJ. MELLIN
in HELSINGFORS.

Im 82. Bande des Crelle'schen Journals hat Herr Prym bewiesen, dass die Function $\Gamma(z)$, welche durch die Bedingungen

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{\Gamma(z+\nu)}{\nu^z \,|\nu - 1} = 1$$

vollständig bestimmt ist, auf die Form

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z)$$

derart gebracht werden kann, dass $P(z)$ eine durch die Bedingungen

$$P(z + 1) = zP(z) - e^{-1}, \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{P(z+\nu)}{\nu^z \,|\nu - 1} = 0$$

vollständig bestimmte und in der Form einer Partialbruchreihe darstellbare Function bezeichnet, während $Q(z)$ eine durch die Bedingungen

$$Q(z + 1) = zQ(z) + e^{-1}, \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{Q(z+\nu)}{\nu^z \,|\nu - 1} = 1$$

vollständig bestimmte und in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelbare Function bedeutet.

In einer Abhandlung *Zur Theorie der Gammafunction,* Bd. 8 dieses Journals S. 37—80, habe ich den obigen Satz in folgender Weise verallgemeinert. Setzt man

$$F(z) = a^{z}\frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z_1')\ldots\Gamma(z-z_n')},$$

$$\mathbf{r}(z) = a\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_m)}{(z-z_1')\ldots(z-z_n')},$$

$$\varkappa = z_1' + \ldots + z_n' - z_1 - \ldots - z_m,$$

wo $z_1, \ldots, z_m, z_1', \ldots, z_n'$ beliebige von z unabhängige Grössen bezeichnen, so hat man den nachstehenden Satz, wo $\mathbf{s}(z)$ eine gewisse rationale Function mit demselben Nenner wie $\mathbf{r}(z)$ und einem Zähler, dessen Gradzahl nicht grösser als $m - 1$ ist, bezeichnet:

Die obige Function $F(z)$, welche durch die Bedingungen

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z), \qquad \lim_{\nu=\infty}\frac{F(z+\nu)}{a^{z+\nu}\left(\nu^z\,|\!\underline{\nu-1}\right)^{m-n}\nu^{\varkappa}} = 1$$

vollständig bestimmt ist, kann, wenigstens in allen Fällen, wo $\lim\limits_{\nu=\infty}|\mathbf{r}(z)| > 1$ ist, auf die Form

$$F(z) = P(z) + Q(z)$$

derart gebracht werden, dass $P(z)$ eine durch die Bedingungen

$$P(z+1) = \mathbf{r}(z)P(z) - \mathbf{s}(z), \qquad \lim_{\nu=\infty}\frac{P(z+\nu)}{a^{z+\nu}\left(\nu^z\,|\!\underline{\nu-1}\right)^{m-n}\nu^{\varkappa}} = 0$$

vollständig bestimmte und in der Form einer Summe von Partialbruchreihen darstellbare Function bezeichnet, während $Q(z)$ eine durch die Bedingungen

$$Q(z+1) = \mathbf{r}(z)Q(z) + \mathbf{s}(z), \qquad \lim_{\nu=\infty}\frac{Q(z+\nu)}{a^{z+\nu}\left(\nu^z\,|\!\underline{\nu-1}\right)^{m-n}\nu^{\varkappa}} = 1$$

vollständig bestimmte und in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelbare Function bedeutet.

Dieser Satz ergab sich in ungezwungener Weise, indem ich mir die Aufgabe stellte, die Function $F(z)$ dem Mittag-Leffler'schen Satze ge-

mäss durch Partialbrüche und eine beständig convergirende Potenzreihe darzustellen. Die Function $P(z)$ kann auch auf die Form

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$

gebracht werden; ein specieller Fall dieser Reihe ist offenbar die zu $\Gamma(z)$ gehörige Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{z(z+1)\ldots(z+\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(z+\nu)\,\lvert\underline{\nu}}.$$

Der obige Satz ist eigentlich nur ein specieller Fall eines noch allgemeineren, in § 9 der genannten Abhandlung bewiesenen Satzes, der sich auf ein System von Functionalgleichungen der Form

$$f(z+1) = \mathbf{r}(z)f(z) - \mathbf{s}(z), \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{f(z+\nu)}{a^{z+\nu}\left(\nu^{z}\,\lvert\underline{\nu-1}\right)^{m-n}\nu^{\varkappa}} = C$$

bezieht, wo C eine Constante und $\mathbf{s}(z)$ eine beliebige rationale Function der Form

$$\mathbf{s}(z) = \frac{c_0 + c_1 z + \ldots + c_{m-1} z^{m-1}}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)}$$

bezeichnet. Nach dem fraglichen Satze giebt es immer eine Function $f(z)$, welche dem obigen Gleichungssysteme genügt; und es ist stets möglich, die Constanten $p_1, \ldots, p_m, q$ derart zu bestimmen, dass

$$f(z) = p_1 P_1(z) + \ldots + p_m P_m(z) + qQ(z)$$

wird, wo $P_1(z), \ldots, P_m(z)$ von einander linear unabhängige Reihen der Form $P(z)$ bezeichnen. Dieser Ausdruck $f(z)$, welcher bei passender Bestimmung von $p_1, \ldots, p_m, q$ in jede beliebige der drei Functionen $F(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ übergeht, ist gewissermassen auch als eine Verallgemeinerung der Gammafunction zu betrachten.

Seitdem die Gammafunction von Euler in die Analysis eingeführt wurde, hat sie auf Grund ihrer Anwendungen einen wichtigen Platz in der Theorie der bestimmten Integrale eingenommen. Es lässt sich nun auch eine überaus grosse Menge von bestimmten Integralen auf die obigen,

mit $\Gamma(z)$ sehr nahe verwandten Transcendenten zurückführen. Diese Integrale können im Allgemeinen in der Gestalt

$$\int y x^{z-1} dx$$

geschrieben werden, wo y eine Function bezeichnet, die einer linearen Differentialgleichung der Form

$$(a_0 + b_0 x)x^n \frac{d^n y}{dx^n} + (a_1 + b_1 x)x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + (a_n + b_n x)y = 0$$

genügt. In dieser Form ist auch die bekannte Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe enthalten. Es zeigt sich somit, dass die Gammafunction auch für die Theorie der soeben angeführten allgemeineren Differentialgleichung von derselben Wichtigkeit ist, wie für die Theorie der genannten Reihe. Die Richtigkeit dieser Bemerkung, welche meines Wissens nicht früher gemacht worden, ist in meiner Arbeit *Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen* [1] hinreichend begründet worden und soll in der vorliegenden Arbeit weiter entwickelt werden.

Bei den Anwendungen der oben besprochenen Functionen in der Theorie der bestimmten Integrale ist es von Wichtigkeit, solche charakteristische Eigenschaften derselben zu kennen, dass sie ohne Schwierigkeit auch an den zu bestimmenden Integralen erkannt werden können. Gegen die Anwendbarkeit der Bedingung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{f(z+\nu)}{a^{z+\nu}\left(\nu^z \left|\underline{\nu-1}\right.\right)^{m-n}\nu^x} = \text{Const.}$$

kann nun aber dasselbe angeführt werden, was Scheeffer in seiner Arbeit *Zur Theorie der Functionen* $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ [2] hinsichtlich der Bedingung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{f(z+\nu)}{\nu \left|\underline{\nu-1}\right.} = \text{Const.}$$

bemerkt hat, dass sie nämlich den Mangel hat, aus der Form der zu bestimmenden Integrale in manchen Fällen nicht ohne Weiteres ersichtlich zu sein. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, wenn gleich viel

[1] Bd. 9. dieses Journals. S. 137—166. Man siehe insbesondere § 3.

[2] Crelles Journal. Bd. 97. S. 230—241.

allgemeiner, dem der SCHEEFFER'schen analog, nämlich zu zeigen, dass die in Frage stehende Bedingung durch andere ersetzt werden kann, welche den Vorzug besitzen, dass sie an den Integralen direct erkannt werden können.

Specielle Fälle der in der vorliegenden Arbeit enthaltenen Sätze sind die nachstehenden, welche im wesentlichen mit den von SCHEEFFER a. a. O. bewiesenen übereinstimmen:

Die Function $\Gamma(z)$ ist, abgesehen von einem constanten Factor, die einzige monogene Function von $z = \zeta + i\zeta'$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. $\Gamma(z)$ befriedigt die Functionalgleichung $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.

II. $\Gamma(z)$ verhält sich im Innern der durch die Bedingung $\zeta > 0$ definirten Hälfte der z-Ebene überall regulär.

III. Wird die Veränderliche z, unter α eine positive Zahl verstanden, auf den zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ beschränkt, so kann der absolute Betrag von $\Gamma(z)$ nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.

Aus diesem Satze ergiebt sich leicht der folgende, wo

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(z+\nu)|\underline{\nu}},$$

und $Q(z) = \Gamma(z) - P(z)$ ist:

Es giebt nur eine einzige monogene Function $F(z)$, welche an einer gegebenen, dem Bereiche $(0 < \alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ angehörigen Stelle einen vorgeschriebenen Werth annimmt und die nachstehenden Eigenschaften besitzt:

I. $F(z)$ befriedigt die Functionalgleichung $F(z + 1) = zF(z) + c$, wo c eine gegebene Constante bezeichnet.

II. $F(z)$ verhält sich im Innern der durch die Bedingung $\zeta \geq 0$ definirten Hälfte der z-Ebene regulär.

III. Wird die Veränderliche z, unter α eine positive Zahl verstanden, auf den Parallelstreifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ beschränkt, so kann $F(z)$ dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.

Bei passender Bestimmung der Constanten p und q kann $F(z)$ auf die Form $pP(z) + qQ(z)$ gebracht werden.

I.

Das Verhalten eines Productes aus mehreren Functionen der Form $\Gamma(z-a)$, $\Gamma(a-z)$ und das Verhalten eines Quotienten zweier solcher Producte bei beschränkter Veränderlichkeit des reellen und unbeschränkter Veränderlichkeit des imaginären Theiles von z.

1. Für die nachfolgenden Untersuchungen ist es von Wichtigkeit zu ermitteln, wie sich eine Function der Form

$$F(z) = \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)\Gamma(\alpha_1-z)\ldots\Gamma(\alpha_\mu-z)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)\Gamma(\beta_1-z)\ldots\Gamma(\beta_\nu-z)}$$

verhält, wenn der reelle Theil der Veränderlichen $z = \zeta + i\zeta'$ auf ein beliebiges, aber endliches Intervall ($\alpha \leqq \zeta \leqq \beta$) beschränkt wird, während ζ' dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst. Das Gebiet der Veränderlichen z wird alsdann durch einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite $\beta - \alpha$ geometrisch dargestellt.

Das Verhalten der Function in einem solchen Parallelstreifen kann folgenderweise charakterisirt werden. *Ist $m + \mu > n + \nu$, so wird $z^k F(z)$ mit wachsendem $|z|$ unendlich klein, wie gross auch die positive ganze Zahl k sein mag. Ist $m + \mu < n + \nu$, so wird $\frac{F(z)}{z^k}$, wo k die obige Bedeutung hat, unendlich gross. Ist endlich $m + \mu = n + \nu$, so kann die nicht negative ganze Zahl k immer so angenommen werden, dass $\frac{F(z)}{z^k}$ mit wachsendem $|z|$ unendlich klein wird.*

Dem Beweise dieses Satzes schicken wir den folgenden Hülfsatz[1] voraus:

Ist die Reihe

$$\Phi(x, y) = 1 + \varphi_2(y)x^2 + \varphi_3(y)x^3 + \ldots,$$

wenn x die Bedingung $|x| \leqq R$ erfüllt, unbedingt convergent, und zwar

[1] Cfr. Weierstrass. Abhandlungen aus der Functionenlehre. S. 212 u. f.

für alle Werthe y, welche einem gewissen Bereich angehören; ist überdies der absolute Betrag von Φ für die besprochenen Werthe von x und y nicht grösser als eine angebbare endliche Grösse G, so ist es, wenn α eine beliebig gegebene reelle Constante und $z = \zeta + i\zeta'$ eine die Bedingung $\alpha \leqq \zeta$ befriedigende Veränderliche bezeichnet, stets möglich, eine positive ganze Zahl m so anzunehmen, dass das unendliche Product

$$P(y, z) = \prod_{\nu=m}^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{z+\nu}, y\right) = \prod_{\nu=m}^{\infty}\left(1 + \frac{\varphi_2(y)}{(z+\nu)^2} + \frac{\varphi_3(y)}{(z+\nu)^3} + \ldots\right)$$

für die oben erwähnten Werthe von y und z convergirt, seinem absoluten Betrage nach nicht grösser als eine gewisse angebbare Zahl werden kann und mit wachsendem $|\zeta'|$ sich der Grenze Eins nähert.

Der Beweis ist sehr einfach. Man braucht nur die ganze Zahl m so zu wählen, dass $\alpha + m - 1 \geqq \frac{1}{R}$ ist. Dann ist offenbar

$$|z+\nu| \geqq \alpha + m > \alpha + m - 1$$

für $\alpha \leqq \zeta$, $\nu = m, m+1, \ldots$, und nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den Potenzreihen

$$|\varphi_\lambda(y)| \leqq \frac{G}{R^\lambda} \leqq (\alpha + m - 1)^\lambda G, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots)$$

für alle Werthe von y, welche dem oben genannten Gebiet dieser Veränderlichen angehören. Hieraus folgt für $\alpha \leqq \zeta$, $\nu \geqq m$:

$$\left|\Phi\left(\frac{1}{z+\nu}, y\right)\right| \leqq 1 + \left|\frac{\alpha+m-1}{z+\nu}\right|^2 G + \left|\frac{\alpha+m-1}{z+\nu}\right|^3 G + \ldots < 1 + \left(\frac{\alpha+m-1}{\alpha+\nu}\right)^2 G$$

$$+ \left(\frac{\alpha+m-1}{\alpha+\nu}\right)^3 G + \ldots = 1 + \left(\frac{\alpha+m-1}{\alpha+\nu}\right)^2 \frac{G}{1 - \frac{\alpha+m-1}{\alpha+\nu}}$$

$$\leqq 1 + \left(\frac{\alpha+m-1}{\alpha+\nu}\right)^2 \frac{G}{1 - \frac{\alpha+m-1}{\alpha+m}} < 1 + \frac{(\alpha+m)^3 G}{(\alpha+\nu)^2}.$$

Der absolute Betrag unseres Productes ist mithin für die oben be-

sprochenen Werthe von y und z kleiner als die constante, durch das convergirende Product

$$\prod_{\nu=m}^{\infty}\left(1+\frac{(\alpha+m)^3 G}{(\alpha+\nu)^2}\right)$$

dargestellte Zahl. Man findet nun auch ohne Schwierigkeit, dass $\lim P(y,z)$ für $\zeta' = \pm\infty$, $\alpha \leqq \zeta$ gleich Eins ist.

Wir beweisen nun zunächst den oben über $F(z)$ ausgesprochenen Satz für einige specielle Functionen der Form $F(z)$, woraus sodann die Allgemeingültigkeit des Satzes leicht gefolgert werden kann. Man darf offenbar unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Breite des im Satze erwähnten Parallelstreifens gleich Eins ist.

2. Aus dem bekannten Ausdrucke der Gammafunction:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^z}{1+\frac{z}{\nu}}$$

ergiebt sich, wenn $z = \zeta + i\zeta'$ gesetzt wird:

$$|\Gamma(z)|^2 = \Gamma(\zeta+i\zeta')\Gamma(\zeta-i\zeta') = \frac{\Gamma^2(\zeta)}{\prod\limits_{\nu=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{\zeta'}{\zeta+\nu}\right)^2\right]}. \tag{1}$$

Wird nun die Veränderliche z auf einen beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$) beschränkt, so zeigt die Gleichung (1), dass $\Gamma(z)$ sich der Grenze Null nähert, wenn ζ' dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst. Offenbar gilt dies ebenfalls von $z^k\Gamma(z)$, wie gross auch die positive ganze Zahl k sein mag.

3. Es soll nun bewiesen werden, dass der Quotient

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)}$$

in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$) die Eigenschaft hat, mit z^{a-b} multiplicirt, sich der Grenze Eins zu nähern, wenn z dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst.

Für diesen Nachweis ist die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)} = z^{b-a} \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1-\dfrac{b}{z+\nu}}{1-\dfrac{a}{z+\nu}} \left(1+\frac{1}{z+\nu}\right)^{b-a}$$

von Wichtigkeit. Sie ergiebt sich durch Multiplication aus den Gleichungen

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)} = \frac{1-\dfrac{b}{z}}{1-\dfrac{a}{z}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-\dfrac{b}{z+\nu}}{1-\dfrac{a}{z+\nu}} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{b-a},$$

$$1 = z\left(1+\frac{1}{z}\right) \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1+\dfrac{1}{z+\nu}}{1+\dfrac{1}{\nu}} = z^{b-a}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{b-a} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{z+\nu}\right)^{b-a}}{\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{b-a}},$$

von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann.

Ist nun R eine positive Constante, welche die Bedingungen

$$R < \left|\frac{1}{a}\right|, \; R < 1$$

erfüllt, so ist der absolute Betrag des Ausdruckes

$$\frac{1-bx}{1-ax}(1+x)^{b-a}$$

für $|x| \leqq R$ kleiner als eine angebbare endliche Grösse, und ausserdem gilt alsdann eine Reihenentwickelung der Form

$$\frac{1-bx}{1-ax}(1+x)^{b-a} = 1 + \varphi_2 x^2 + \varphi_3 x^3 + \dots,$$

wo die φ von x unabhängige Werthe haben. Nimmt man nun die positive ganze Zahl m so gross an, dass $\alpha + m - 1 \geqq \frac{1}{R}$, so ist das Product

$$\prod_{\nu=m}^{\infty} \frac{1-\dfrac{b}{z+\nu}}{1-\dfrac{a}{z+\nu}} \left(1+\frac{1}{z+\nu}\right)^{b-a} = \prod_{\nu=m}^{\infty} \left(1+\frac{\varphi_2}{(z+\nu)^2}+\dots\right),$$

für $\zeta \geqq \alpha$, auf Grund des in § 1. bewiesenen Hülfsatzes, dem absoluten Betrage nach kleiner als eine gewisse endliche Grösse und nähert sich mit wachsendem $|z|$ der Grenze Eins. Aus der Gleichung

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)} = z^{b-a} \prod_{\nu=0}^{m-1} \frac{1-\dfrac{b}{z+\nu}}{1-\dfrac{a}{z+\nu}}\left(1+\frac{1}{z+\nu}\right)^{b-a} \cdot \prod_{\nu=m}^{\infty} \frac{1-\dfrac{b}{z+\nu}}{1-\dfrac{a}{z+\nu}}\left(1+\frac{1}{z+\nu}\right)^{b-a}$$

folgt daher, dass ihre linke Seite auf die Form

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)} = z^{b-a}\varphi \tag{3}$$

gebracht werden kann, wo φ eine Grösse bezeichnet, welche sich der Grenze Eins nähert, wenn die Veränderliche z dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst, während ihr reeller Theil der Bedingung $\zeta \geqq \alpha$ unterworfen ist. Dies gilt natürlich um so mehr, wenn ζ auf das Intervall $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ beschränkt wird.

4. Um das Verhalten des Quotienten

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(b-z)}$$

im Bereiche $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ zu ermitteln, ist es hinreichend zu entscheiden, wie sich der Quotient $\dfrac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)}$ daselbst verhält; denn es ist

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(b-z)} = \frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z)} \cdot \frac{\Gamma(-z)}{\Gamma(-z+b)} \cdot \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)}, \tag{4}$$

und nach § 3. wissen wir schon, wie sich die zwei ersten Factoren der rechten Seite in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen verhalten. Da $\Gamma(i\zeta' - \zeta)$ und $\Gamma(-i\zeta' - \zeta)$ conjugirte Grössen sind, so ist der absolute Betrag von

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)} = \frac{\Gamma(\zeta + i\zeta')}{\Gamma(-\zeta - i\zeta')} = \frac{\Gamma(i\zeta' + \zeta)}{\Gamma(i\zeta' - \zeta)} \cdot \frac{\Gamma(i\zeta' - \zeta)}{\Gamma(-i\zeta' - \zeta)} \tag{5}$$

gleich dem absoluten Betrage von

$$\frac{\Gamma(i\zeta' + \zeta)}{\Gamma(i\zeta' - \zeta)}.$$

Schliesslich hat man also, nur diesen letzten Quotienten zu betrachten.

Schreibt man in der Gleichung (2) § 3. statt z, a, b bezüglich $i\zeta'$, $-\zeta$, ζ, so folgt

(6)
$$\frac{\Gamma(i\zeta' + \zeta)}{\Gamma(i\zeta' - \zeta)}$$

$$= (i\zeta')^{2\zeta} \prod_{\nu=0}^{m-1} \frac{1 - \frac{\zeta}{i\zeta' + \nu}}{1 + \frac{\zeta}{i\zeta' + \nu}} \left(1 + \frac{1}{i\zeta' + \nu}\right)^{2\zeta} \cdot \prod_{\nu=m}^{\infty} \frac{1 - \frac{\zeta}{i\zeta' + \nu}}{1 + \frac{\zeta}{i\zeta' + \nu}} \left(1 + \frac{1}{i\zeta' + \nu}\right)^{2\zeta}.$$

Nimmt man nun R kleiner als Eins und m so gross an, dass die Bedingung

$$\frac{|\zeta|}{m} \leq R < 1$$

erfüllt ist, wenn ζ auf das Intervall $\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1$ beschränkt wird, so ist der absolute Betrag von

$$\frac{1 - \frac{\zeta}{i\zeta' + \nu}}{1 + \frac{\zeta}{i\zeta' + \nu}} \left(1 + \frac{1}{i\zeta' + \nu}\right)^{2\zeta}$$

für $\nu = m, m + 1, \ldots$ und für alle reellen Werthe von ζ' kleiner als eine angebbare Grösse, und es gilt für denselben Ausdruck auch eine Reihenentwickelung der Form

$$1 + \frac{\varphi_2(\zeta)}{(i\zeta' + \nu)^2} + \frac{\varphi_3(\zeta)}{(i\zeta' + \nu)^3} + \cdots.$$

Wendet man jetzt den in § 1. bewiesenen Hülfsatz an, so folgt aus den Gleichungen (5) und (6), da $(i\zeta')^{2\zeta} = z^{2\zeta}\left(\frac{i\zeta'}{\zeta + i\zeta'}\right)^{2\zeta}$ ist, dass der Quotient $\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)}$ auf die Form

(7)
$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)} = z^{2z}\varphi$$

gebracht werden kann, wo φ eine Grösse bezeichnet, deren absoluter Betrag sich der Grenze Eins nähert, wenn der imaginäre Theil von z dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst, während der reelle Theil die Bedingung $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$ erfüllt.

Versteht man unter φ fortwährend eine Grösse, deren absoluter Betrag sich einer endlichen, von Null verschiedenen Grenze nähert, wenn $\sqrt{\zeta^2 + \zeta'^2} = |z|$ gemäss der Bedingung $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$ ohne Ende wächst, so ergiebt sich aus den Gleichungen (3), (4) und (7):

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(b-z)} = z^{2\zeta-a-b}\varphi.$$

und hieraus

$$\frac{\Gamma(b-z)}{\Gamma(z-a)} = z^{a+b-2\zeta}\varphi.$$

5. Mit Hülfe der in den vorigen Paragraphen bewiesenen Gleichungen können wir nunmehr das Verhalten der Function

$$F(z) = \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)\,\Gamma(\alpha_1-z)\ldots\Gamma(\alpha_\mu-z)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)\,\Gamma(\beta_1-z)\ldots\Gamma(\beta_\nu-z)}$$

in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen charakterisiren. Aus Gleichung (3) folgt

$$\Gamma(z-a) = \Gamma(z)\,\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z)} = z^{-a}\Gamma(z)\varphi,$$

$$\Gamma(a-z) = \Gamma(-z)\frac{\Gamma(a-z)}{\Gamma(-z)} = z^{a}\Gamma(-z)\varphi.$$

In diesen Gleichungen, sowie auch in den folgenden, sind stets unter φ Grössen verstanden, deren absolute Beträge sich endlichen von Null verschiedenen Grenzen nähern, wenn die auf einen beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen beschränkte Veränderliche z ihrem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst. Mit Benutzung der obigen Gleichungen kann $F(z)$ zunächst auf die folgende Form gebracht werden

$$F(z) = z^{\varkappa}\Gamma^{m-n}(z)\Gamma^{\mu-\nu}(-z)\varphi,$$

wo zur Abkürzung

$$\varkappa = b_1 + \ldots + b_n - a_1 - \ldots - a_m + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu - \beta_1 - \ldots - \beta_\nu$$

gesetzt worden ist. Benutzt man die in § 4. bewiesene Gleichung $\Gamma(-z) = z^{-2\zeta}\Gamma(z)\varphi$, so folgt:

$$\frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)\Gamma(\alpha_1-z)\ldots\Gamma(\alpha_\mu-z)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)\Gamma(\beta_1-z)\ldots\Gamma(\beta_\nu-z)} = z^{\varkappa-2(\mu-\nu)\zeta}\Gamma^{m-n+\mu-\nu}(z)\varphi. \tag{8}$$

Dieser Gleichung entnehmen wir unmittelbar den folgenden Satz:

Bewegt sich die Veränderliche z in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite derart, dass ihr absoluter Betrag ohne Ende wächst, so nähert sich $z^k F(z)$, falls $m+\mu > n+\nu$ ist, der Grenze Null, und zwar wie gross auch die positive ganze Zahl k angenommen werden mag. Ist $m+\mu = n+\nu$, so kann die nicht negative ganze Zahl k so angenommen werden, dass $z^{-k}F(z)$ sich auch der Grenze Null nähert. Ist aber $m+\mu < n+\nu$, so wird $z^{-k}F(z)$ unendlich gross, wie gross auch k angenommen werden mag.

Die nachstehenden Gleichungen (9), (10), (11), (12) sind bemerkenswerthe specielle Fälle von (8).

$$\frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)\Gamma(\alpha_1-z)\ldots\Gamma(\alpha_\mu-z)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)\Gamma(\beta_1-z)\ldots\Gamma(\beta_\mu-z)} = z^{\varkappa}\Gamma^{m-n}(z)\varphi, \tag{9}$$

$$\varkappa = b_1 + \ldots + b_n - a_1 - \ldots - a_m + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu - \beta_1 - \ldots - \beta_\mu.$$

$$\frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)} = z^{\varkappa}\Gamma^{m-n}(z)\varphi, \tag{10}$$

$$\varkappa = b_1 + \ldots + b_n - a_1 - \ldots - a_m.$$

$$\frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_m)} = z^{\varkappa}\varphi, \tag{11}$$

$$\varkappa = b_1 + \ldots + b_m - a_1 - \ldots - a_m.$$

$$\frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)}\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p) = z^{\varkappa-p+2p\zeta}\Gamma^{m-n-2p}(z)\varphi, \tag{12}$$

$$\varkappa = b_1 + \ldots + b_n - a_1 - \ldots - a_m.$$

Die letzte Gleichung ergiebt sich leicht, indem man die trigonometrischen Factoren der linken Seite mit Hülfe der Formel $\sin\pi z = \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}$

durch die Gammafunction ausdrückt und sodann die allgemeine Gleichung (8) in Anwendung bringt.

6. Beschränkt man die Veränderliche z auf einen beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen, so verhält sich der im vorigen Paragraphen betrachtete Ausdruck $F(z)$, abgesehen von einer Potenz von z, für ohne Ende wachsende Werthe von z wie eine ganzzahlige Potenz von $\Gamma(z)$. Es ist daher von Wichtigkeit, genauer, als dies in § 2 geschah, zu bestimmen, in welcher Weise $\Gamma(z)$ sich der Grenze Null nähert, wenn z, in einem solchen Streifen bleibend, sich von der reellen Axe entfernt. Da $\Gamma(\zeta + i\zeta')$ und $\Gamma(\zeta - i\zeta')$ conjugirte Grössen sind, so ist es für unseren Zweck hinreichend, $\Gamma(z)$ für wachsende *positive* Werthe von ζ' zu untersuchen.

In Folge der Gleichung $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ ist

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(1-z)}}\sqrt{\frac{\pi}{\sin \pi z}}.$$

Daraus ergiebt sich, wenn man die Gleichungen $\Gamma(z) = z^{2\zeta-1}\Gamma(1-z)\varphi$ und $\sin \pi z = \frac{e^{\pi z i} - e^{-\pi z i}}{2i}$ berücksichtigt:

$$\Gamma(z) = z^{\zeta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi z i}{2}} \sqrt{\frac{2\pi i}{e^{2\pi z i} - 1}}\,\varphi,$$

wo φ die früher festgesetzte Bedeutung hat. Die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse nähert sich für wachsende positive Werthe von ζ' der Grenze $-2\pi i$. Man kann somit einfach

$$(13) \qquad \Gamma(z) = z^{\zeta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi z i}{2}} \varphi_1$$

setzen, wo φ_1 für wachsende *positive* Werthe von ζ' sich einer endlichen von Null verschiedenen Grenze nähert, wenn ζ zwischen endlichen Grenzen bleibt. Weil $|\Gamma(\zeta - i\zeta')| = |\Gamma(\zeta + i\zeta')|$ ist, so haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Bewegt sich die Veränderliche z in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen derart, dass ihr absoluter Betrag ohne Ende wächst, so gilt, unabhängig von dem Zeichen von ζ', die Gleichung

(14) $$|\Gamma(z)| = |z|^{\zeta-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|\zeta'|} \Phi,$$

wo Φ eine positive Veränderliche bezeichnet, die sich einer endlichen von Null verschiedenen Grenze nähert.[1]

Mit Hülfe von (14) können die Gleichungen (8), (9), (10), (12) des vorigen Paragraphen in anderer Weise geschrieben werden. Nehmen wir beispielsweise nur die Gleichungen (10) und (12) in Betracht, so ergiebt sich der folgende Satz:

Bewegt sich die Veränderliche z in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen derart, dass ihr absoluter Betrag ohne Ende wächst, so gelten, unabhängig von dem Zeichen von ζ', die Gleichungen

(15) $$\left|\frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)}\right| = \left|z^{\varkappa+(m-n)\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)}\right| e^{-\frac{m-n}{2}\pi|\zeta'|}\Phi,$$

(16) $$\left|\frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_n)}\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\right|$$
$$= \left|z^{\varkappa+(m-n)\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)}\right| e^{-\frac{m-n-2p}{2}\pi|\zeta'|}\Phi,$$
$$(\varkappa = b_1 + \ldots + b_n - a_1 - \ldots - a_m)$$

wo die Φ die oben angegebene Bedeutung haben.

II.

Functionen, welche lineare homogene Differenzengleichungen erster Ordnung befriedigen.

7. Da es bei der Anwendung der Gammafunctionen in der Theorie der bestimmten Integrale von Wichtigkeit ist, solche charakteristische Eigenschaften der Functionen zu besitzen, dass sie ohne Schwierigkeit auch an

[1] Cf. Pincherle. *Sulle funzione ipergeometriche generalizzate.* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei. Vol. 4, S. 798—799.

den zu bestimmenden Integralen erkannt werden können, so stellen wir uns die Aufgabe, einen allgemeinen Ausdruck zu ermitteln, durch welchen sämmtliche Functionen, welche die im Nachstehenden unter I, II und III erwähnten Eigenschaften besitzen, dargestellt werden können. Diese Eigenschaften kommen nämlich mehreren der im vorigen Abschnitte betrachteten Functionen zu und können sehr leicht auch an den entsprechenden Integralen erkannt werden.

Es sei also $F(z)$ eine analytische Function, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. $F(z)$ befriedigt die Differenzengleichung

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z),$$

wo $\mathbf{r}(z)$ eine gegebene rationale Function bedeutet.

II. In der Ebene der Veränderlichen $z = \zeta + i\zeta'$ giebt es einen zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$, wo $F(z)$ sich überall regulär verhält; dabei wird in Bezug auf die Lage des Streifens vorausgesetzt, dass die Zahl α im algebraischen Sinne grösser ist als die reellen Theile der Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{r}(z)$.

III. In dem unter II erwähnten Bereiche kann $F(z)$, mit einer passenden Potenz von z multiplicirt, dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen, wenn für den Fall, dass die Stelle $z = 0$ dem fraglichen Bereiche angehört, eine beliebig kleine Umgebung derselben aus dem genannten Bereiche ausgeschlossen wird.

Verhält sich eine der Gleichung $F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$ genügende Function in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ regulär, so verhält sie sich in derselben Weise in dem Streifen $(\alpha + 1 < \zeta \leq \alpha + 2)$, wenn jener keine Unendlichkeitsstelle von $\mathbf{r}(z)$ enthält. Ebenso verhält sie sich, weil $F(z-1) = \frac{F(z)}{\mathbf{r}(z-1)}$ ist, auch in dem Streifen $(\alpha - 1 \leq \zeta \leq \alpha)$ regulär, wenn in diesem sich keine Nullstelle von $\mathbf{r}(z)$ findet. Auf Grund dieser evidenten Sätze können offenbar die oben unter II und III erwähnten Bedingungen durch die folgenden ersetzt werden:

II′. $F(z)$ verhält sich — unter β die im algebraischen Sinne grösste Zahl verstanden, welche unter den reellen Theilen der Nullstellen von

$\mathbf{r}(z)$ zu finden ist — im Innern der durch die Bedingung $\zeta \geqq \beta$ definirten Hälfte der z-Ebene überall regulär.

III'. Wird die reelle Zahl α im algebraischen Sinne grösser als β, sonst aber beliebig angenommen, und die Veränderliche z auf den Parallelstreifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ beschränkt, so kann $F(z)$, mit einer passenden Potenz von z multiplicirt, dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.

Handelt es sich um die Aufgabe, diejenigen Functionen $f(z)$ zu bestimmen, welche die obigen Eigenschaften mit dem Unterschiede besitzen, dass die Hälfte der z-Ebene, wo sie sich regulär verhalten — anstatt der unendlich grossen positiven — die unendlich grossen negativen Zahlen enthalten soll, so kann diese Aufgabe, indem man $F(z) = f(-z)$ setzt, auf die vorige zurückgeführt werden.

Bezeichnen $z_1, \ldots, z_m$ die Null- und $z'_1, \ldots, z'_n$ die Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{r}(z)$, so kann $\mathbf{r}(z)$ auf die Form

$$(17) \qquad \mathbf{r}(z) = a\frac{(z - z_1)\ldots(z - z_m)}{(z - z'_1)\ldots(z - z'_n)}$$

gebracht werden. Den absoluten Betrag von a bezeichnen wir mit ρ und setzen

$$a = \rho e^{i\theta}.$$

Die reelle Zahl θ wird weiterhin stets durch die Bedingung

$$-\pi < \theta \leqq +\pi$$

in eindeutiger Weise definirt.

Zur Abkürzung setzen wir ferner

$$(18) \qquad \mathbf{F}(z) = \frac{\Gamma(z - z_1)\ldots\Gamma(z - z_m)}{\Gamma(z - z'_1)\ldots\Gamma(z - z'_n)}.$$

In Folge dieser Definition besitzt die Function $\mathbf{F}(z)$, welche im weiteren Verlaufe unserer Untersuchungen oft benutzt werden soll, die Eigenschaft

$$\mathbf{F}(z + 1) = a^{-1}\mathbf{r}(z)\mathbf{F}(z).$$

Es ist offenbar $a^z\mathbf{F}(z)$ eine specielle Function, welche die Bedingungen I. und II. erfüllt. Aus Gleichung (15) ergiebt sich leicht, dass $a^z\mathbf{F}(z)$

auch die Eigenschaft III. wenigstens in allen den Fällen besitzt, wo $m \geqq n$ und a gleich einer reellen positiven Zahl ist. Durch die nachfolgenden Schlussfolgerungen gelangt man aber zu einer analytischen Darstellung sämmtlicher Functionen, welche die genannten drei Eigenschaften überhaupt besitzen können.

Setzt man, unter $F(z)$ eine eben solche Function verstehend:

$$\phi(z) = a^{-z}\frac{F(z)}{\mathbf{F}(z)}, \tag{19}$$

so ist $\phi(z+1) = \phi(z)$. Wegen II. kann die Function $\phi(z)$ an keiner endlichen Stelle des Bereichs $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ und somit, weil sie die Periode 1 besitzt, auch an keiner endlichen Stelle der z-Ebene unendlich gross werden. Gelingt es nun diese ganze und periodische Function zu bestimmen, so ergiebt sich $F(z)$ aus der Gleichung (19).

Wird die positive ganze Zahl λ hinreichend gross angenommen, so kann nachgewiesen werden, dass die der Gleichung $\Psi(z+1) = (-1)^\lambda \Psi(z)$ genügende Function

$$\Psi(z) = \frac{\phi(z)}{\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_\lambda)}, \tag{20}$$

und somit auch $\phi(z)$, durch trigonometrische Functionen ausgedrückt werden kann. Offenbar kann $\Psi(z)$ im Endlichen nur für solche Werthe, die sich von den Constanten $c_1, \ldots, c_\lambda$ um ganze Zahlen unterscheiden, einen unendlich grossen Werth annehmen. Damit $\Psi(z)$ keine Unendlichkeitsstelle höherer als der ersten Ordnung besitze, wollen wir der Einfachheit halber festsetzen, dass die Differenz irgend zweier der Constanten $c_1, \ldots, c_\lambda$ keine ganze Zahl sein soll; im übrigen sind $c_1, \ldots, c_\lambda$ beliebig anzunehmende Grössen. Ihre Anzahl soll zunächst nur der Bedingung $2\lambda + n \geqq m + 2\left|\frac{\theta}{\pi}\right|$ unterworfen sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Function $\Psi(z)$ mit $F(z)$ die Eigenschaft gemein, dass sie, wenigstens nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, für $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$, $\zeta' = \pm\infty$ gleich Null wird. Dies ergiebt sich, indem man bemerkt, dass der Nenner von

$$\Psi(z) = \frac{a^{-z}F(z)}{\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_\lambda)}, \tag{21}$$

auf Grund der obigen Definition von $\mathbf{F}(z)$, die Form der in Gleichung (16) des vorigen Abschnittes vorkommenden Function hat. Mit Benutzung jener Gleichung erhält man [1]

$$|\Psi(z)| = e^{\theta\zeta' + \frac{m-n-2\lambda}{2}\pi|\zeta'|} \rho^{-\zeta} \left| F(z) z^{(n-m)\left(\zeta - \frac{1}{2}\right) - \varkappa} \right| \Phi,$$

$$(\varkappa = z'_1 + \ldots + z'_n - z_1 - \ldots - z_m),$$

woraus die Richtigkeit unserer Behauptung sofort erhellt, weil der Exponent von e niemals positiv werden kann. Da $\Psi(z+1) = (-1)^\lambda \Psi(z)$ ist, so ergiebt sich leicht, dass $z^{-k}\Psi(z)$, bei passender Bestimmung von k, nicht nur für $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$, sondern auch für ein unbeschränkt veränderliches ζ, sich in gleichmässiger Weise der Grenze Null nähert, wenn $|\zeta'|$ ohne Ende wächst. Dies wollen wir folgendermassen ausdrücken:

$$\lim_{\zeta' = \pm\infty} z^{-k}\Psi(z) = 0, \qquad -\infty \leqq \zeta \leqq +\infty.$$

Bildet man nun schliesslich für den Fall, dass λ grade ist, den Ausdruck

$$D(z) = \Psi(z) - [A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)],$$

für den Fall aber, dass λ ungrade ist, den Ausdruck

$$D_1(z) = \Psi(z) - \left(\frac{A_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_\lambda}{\sin \pi(z - c_\lambda)}\right),$$

so kann gezeigt werden, dass die Constanten $A_1, \ldots, A_\lambda$ immer und nur in einer Weise derart bestimmt werden können, dass die Differenz $D(z)$ (resp. $D_1(z)$) sich auf eine Constante reducirt. Da die Differenz $D(z)$ (resp. $D_1(z)$) bei unbestimmten Werthen von $A_1, \ldots, A_\lambda$ überhaupt nur für solche Werthe von z, die sich von $c_1, \ldots, c_\lambda$ um ganze Zahlen unterscheiden, unendlich werden kann, und weil sie überdies die Eigenschaft $D(z+1) = D(z)$ (resp. $D_1(z+1) = -D_1(z)$) besitzt, so folgt zunächst, dass sie sich auf eine ganze Function reducirt, wenn $A_1, \ldots, A_\lambda$ so bestimmt werden, dass $D(z)$ (resp. $D_1(z)$) sich in der Umgebung jeder der

---

[1] In diesem Abschnitte bezeichnet Φ stets eine positive Veränderliche von der in § 6. angegebenen beschaffenheit.

Stellen $c_1, \ldots, c_\lambda$ regulär verhält. Eine solche Bestimmung ist stets und nur in einer Weise möglich. Denn in der Umgebung von $z = c_1$ hat man beispielsweise

$$D(z) + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) = \Psi(z) - [A_2 \operatorname{cotg} \pi(z - c_2) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)]$$

$$= \frac{C}{z - c_1} + \mathfrak{P}(z - c_1),$$

$$- A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) = - \frac{A_1}{\pi(z - c_1)} + \mathfrak{P}_1(z - c_1),$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z - c_1$ fortschreitende Reihen bezeichnen, während C eine gewisse Constante bedeutet. Setzt man nun $A_1 = \pi C$, so verhält sich $D(z)$ in der Umgebung von $z = c_1$ regulär. Wir können somit annehmen, dass $A_1, \ldots, A_\lambda$ solche Werthe haben, dass $D(z)$ (resp. $D_1(z)$) eine ganze Function ist.

Aus den Gleichungen

$$\lim_{\zeta' = \pm\infty} z^{-k} \Psi(z) = 0, \qquad \lim_{\zeta' = \pm\infty} \frac{1}{\sin z} = 0, \qquad \lim_{\zeta' = \pm\infty} \operatorname{cotg} z = \mp i,$$

$$-\infty \leqq \zeta \leqq +\infty,$$

folgt ferner, dass $D(z)$ (resp. $D_1(z)$) bei passender Bestimmung von k ebenfalls die Eigenschaft

$$(22) \qquad \lim_{\zeta' = \pm\infty} z^{-k} D(z) = 0, \qquad -\infty \leqq \zeta \leqq +\infty,$$

haben muss. Daraus ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung $D(z + 1) = D(z)$:

$$(23) \qquad \lim_{\zeta = \pm\infty} z^{-k} D(z) = 0, \qquad -\infty \leqq \zeta' \leqq +\infty.$$

Aus (22) und (23) folgt schliesslich, dass $z^{-k} D(z)$ (resp. $z^{-k} D_1(z)$) sich der Grenze Null nähert, wenn z in beliebiger Weise sich der Stelle $z = \infty$ nähert. Daher ist $z = \infty$ keine wesentliche singuläre Stelle für die ganze Function $D(z)$ (resp. $D_1(z)$), welche somit rational sein muss. Wenn aber eine rationale Function die Eigenschaft $D(z + 1) = D(z)$ (resp. $D_1(z + 1) = - D_1(z)$) besitzt, so muss sie sich auf eine Constante reduciren. Insbesondere muss offenbar $D_1(z) = 0$ sein.

Da $\Psi(z)$ durch Gleichung (21) definirt ist, so erhalten wir für unsere Function $F(z)$, je nachdem λ grade oder ungrade angenommen wird, die folgenden Ausdrücke:

$$(24)\qquad F(z) = a^z\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots$$
$$\ldots\sin\pi(z-c_\lambda)[A_0 + A_1\operatorname{cotg}\pi(z-c_1) + \ldots + A_\lambda\operatorname{cotg}\pi(z-c_\lambda)],\qquad (\lambda=2k)$$

$$(25)\quad F(z)=a^z\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_\lambda)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\ldots+\frac{A_\lambda}{\sin\pi(z-c_\lambda)}\right],\qquad (\lambda=2k+1)$$

wo statt $D\ A_0$ geschrieben worden ist. Die Grössen $c_1, \ldots, c_\lambda$ haben wir nur der Bedingung unterworfen, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl sein soll. Ihre Anzahl λ kann unter der Beschränkung

$$2\lambda + n \geqq m + 2\left|\frac{\theta}{\pi}\right|$$

beliebig angenommen werden.

Unter den in den obigen Formen darstellbaren Functionen ist jede Function, welche die Eigenschaften I., II., III. überhaupt besitzen kann, zu suchen. Es ist nun zunächst sofort ersichtlich, dass die beiden Ausdrücke (24) und (25) nicht nur die unter I. sondern auch die unter II. genannte Eigenschaft besitzen, wenn die unter II. erwähnte Zahl α grösser ist als der reelle Theil einer jeden der Constanten $z_1, \ldots, z_m$. Wir gehen jetzt dazu über, unter den obigen Functionen diejenigen zu ermitteln, welche auch die unter III. erwähnte Eigenschaft besitzen.

8. **Erster Fall:** $m < n$. Da $\left|\frac{\theta}{\pi}\right|$, in Folge der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition der Zahl θ, höchstens gleich Eins ist, so ist die Bedingung $2\lambda + n \geqq m + 2\left|\frac{\theta}{\pi}\right|$ erfüllt, wenn $\lambda = 1$ angenommen wird. Aus (25) ergiebt sich

$$F(z) = A_1a^z\mathbf{F}(z) = A_1a^z\frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z_1')\ldots\Gamma(z-z_n')}.$$

Wendet man die Gleichung (15) des vorigen Abschnittes an, so folgt

$$|F(z)| = \rho^{\zeta} e^{\frac{n-m}{2}\pi|\zeta'| - \theta\zeta'} \left| z^{\varkappa + (m-n)\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)} \right| \Phi$$

$$(\varkappa = z'_1 + \ldots + z'_n - z_1 - \ldots - z_m).$$

Durchläuft ζ' alle reellen Werthe, so kann $\frac{n-m}{2}\pi|\zeta'| - \theta\zeta'$, wegen der Voraussetzung $n > m$, beliebig grosse positive Werthe erhalten. Der absolute Betrag von $F(z)z^{-k}$ kann daher, wie gross auch k sein mag, in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen über jede endliche Grenze wachsen. Also haben wir den Satz:

Ist die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{r}(z)$ *kleiner als die des Nenners, so giebt es, von Null abgesehen, überhaupt keine analytische Function, welche, ausser den Eigenschaften* I., II., *noch die Eigenschaft* III. *besässe.*

9. **Zweiter Fall:** $m = n$. Auch in diesem Falle kann offenbar $\lambda = 1$ gesetzt werden. Aus (25) ergiebt sich

$$F(z) = A_1 a^z \frac{\Gamma(z - z_1) \ldots \Gamma(z - z_m)}{\Gamma(z - z'_1) \ldots \Gamma(z - z'_m)}.$$

Wendet man die Gleichung (15) an, so folgt

$$(26) \qquad |F(z)| = \rho^{\zeta} e^{-\theta\zeta'} |z^{\varkappa}| \Phi, \qquad (\varkappa = z'_1 + \ldots + z'_m - z_1 - \ldots - z_m).$$

Ist a eine reelle negative oder eine complexe Grösse, und somit θ von Null verschieden, so kann der absolute Betrag von $F(z)z^{-k}$, wie gross auch k sei, in einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen über jede endliche Grenze wachsen. Ist dagegen a reel und positiv, d. h. $\theta = 0$, so nähert sich $F(z)z^{-k}$ in jedem solchen Streifen der Grenze Null, wenn k grösser als der reelle Theil von $\varkappa$ angenommen wird. Also haben wir den Satz:

Ist die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{r}(z)$ *gleich der des Nenners und* a *eine negative oder complexe Grösse, so giebt es, von Null abgesehen, überhaupt keine analytische Function, welche, ausser den Eigenschaften* I., II., *noch die Eigenschaft* III. *besässe. Ist dagegen* a *eine reelle und positive Zahl, so ist*

$$F(z) = a^z \frac{\Gamma(z - z_1) \ldots \Gamma(z - z_m)}{\Gamma(z - z'_1) \ldots \Gamma(z - z'_m)},$$

abgesehen von einem constanten Factor, die einzige Function, welche alle drei Eigenschaften wirklich besitzt.

Unter Voraussetzung eines positiven a ergiebt sich aus (26) der Satz:

In jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$), *für den* α *grösser als die reellen Theile von* $z_1, \ldots, z_m$ *ist, kann der absolute Betrag von* $F(z)$, *wenn der reelle Theil von* $\varkappa \leqq 0$ *ist, nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Ist dagegen der genannte Theil grösser als Null, so wird* $F(z)$ *in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen mit wachsendem* $|z|$ *unendlich gross.*

10. **Dritter Fall:** $m > n$. Bei dieser Gelegenheit soll dieser Fall nicht in seiner grössten Allgemeinheit erörtert werden. Wir wollen nämlich voraussetzen, dass die in $\mathbf{r}(z)$ vorkommende Grösse a reel und positiv sei. Diese Beschränkung kann dadurch motivirt werden, dass die Resultate unserer Untersuchungen, wenn a reel und positiv angenommen wird, in sehr einfacher Weise in einem Satze zusammengefasst werden können. Ausserdem zeigt es sich bei den Anwendungen unserer Functionen (IV. Abschnitt), dass es in den meisten und wichtigsten Fällen sogar hinreichend ist, sich auf solche Functionen, für die $a = 1$ ist, zu beschränken.

Ferner soll die in § 7 unter III. (resp. III'.) erwähnte Bedingung die folgende beschränkende Modification erfahren:

III[a]. Die betreffende Function $F(z)$ soll in *keinem* Parallelstreifen ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$), welche die unter II. angegebene Lage hat, ihrem absoluten Betrage nach über eine endliche, von der Lage des Streifens im Allgemeinen abhängende, Grenze wachsen können.

Diese Bedingung wird in ähnlicher Weise motivirt, wie die Voraussetzung, dass a positiv sein soll.

Im Nachstehenden kommt der folgende Hülfsatz zur Anwendung:

Wenn die beiden Grenzwerthe

$$\lim_{\zeta'=+\infty} \left[A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)\right]$$

und

$$\lim_{\zeta'=-\infty} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)]$$

gleich Null sind, so ist bei passender Bestimmung von $B_1, \ldots, B_{\lambda-1}$:

$$(27) \qquad A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)$$
$$= \frac{1}{\sin \pi(z - c_\lambda)} \left[\frac{B_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{B_{\lambda-1}}{\sin \pi(z - c_{\lambda-1})}\right].$$

Mit Benutzung der Gleichungen

$$\lim_{\zeta'=+\infty} \operatorname{cotg} \pi(z - c) = -i, \qquad \lim_{\zeta'=-\infty} \operatorname{cotg} \pi(z - c) = i$$

ergiebt sich nämlich

$$\lim_{\zeta'=\infty} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)]$$
$$= A_0 - iA_1 - \ldots - iA_\lambda = 0,$$
$$\lim_{\zeta'=-\infty} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)]$$
$$= A_0 + iA_1 + \ldots + iA_\lambda = 0,$$

und hieraus:

$$A_0 = 0, \qquad A_\lambda = -A_1 - A_2 - \ldots - A_{\lambda-1}.$$

Setzt man diese Werthe in die linke Seite von (27) ein, so nimmt sie, nach einer einfachen Rechnung, die Form der rechten Seite an.

Jede Function $F(z)$, welche die in Rede stehenden Eigenschaften besitzt, kann sowohl in der Form (24) als in der Form (25) dargestellt werden, je nachdem die ganze Zahl λ, welche nur der Bedingung $2\lambda + n \geqq m$ zu genügen braucht, grade oder ungrade angenommen wird. Die einfachste Form erhält aber $F(z)$, *wenn λ die kleinste ganze Zahl bezeichnet, für welche $2\lambda + n$ nicht kleiner ist als m:*

$$(28) \qquad 2\lambda + n \geqq m > 2(\lambda - 1) + n.$$

Es erhält dann λ einen eindeutig bestimmten Werth; und zwar aus der Gleichung $2\lambda + n = m$, wenn $m - n$ grade ist, aus der Gleichung $2\lambda + n = m + 1$ dagegen, wenn $m - n$ ungrade ist. Weiterhin soll λ stets durch (28) definirt sein.

Ist nun die durch (28) definirte Zahl λ grade, so ergeben sich sämmt-

liche Functionen, welche, ausser den in § 7. unter I. und II., noch die im Vorhergehenden unter III^a. angegebene Eigenschaft besitzen, aus der Gleichung

$$(29)\qquad F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z-c_1)\dots$$
$$\dots\sin\pi(z-c_\lambda)[A_0 + A_1 \operatorname{cotg}\pi(z-c_1) + \dots + A_\lambda \operatorname{cotg}\pi(z-c_\lambda)].\qquad (\lambda=2k)$$

Ist dagegen λ ungrade, so ergeben sie sich aus der Gleichung

$$(30)\quad F(z)=a^z\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\dots\sin\pi(z-c_\lambda)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\dots+\frac{A_\lambda}{\sin\pi(z-c_\lambda)}\right],\qquad (\lambda=2k+1)$$

In den nachfolgenden Gleichungen haben wir zur Abkürzung

$$z^{x+(m-n)\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)} = Z$$

gesetzt.

A. Ist $\lambda = 2k+1$, so ergiebt sich aus (30) mit Benutzung von (16)

$$(31)\qquad |F(z)| = a^\zeta e^{\frac{n+2(\lambda-1)-m}{2}\pi|\zeta'|}|Z|\left|A_1\frac{\sin\pi(z-c_\lambda)}{\sin\pi(z-c_1)}+\dots+A_\lambda\frac{\sin\pi(z-c_\lambda)}{\sin\pi(z-c_\lambda)}\right|\Phi,$$

wo Φ die in § 6. angegebene Bedeutung hat. Wegen (28) ist $n+2(\lambda-1)-m$ negativ. Es ist somit $\lim\limits_{\zeta'=\pm\infty} F(z) = 0$, wenn der reelle Theil von z auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt wird. Ist also die durch (28) definirte Zahl λ ungrade, so besitzt jede in der Form

$$F(z) = a^z\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\dots\sin\pi(z-c_\lambda)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\dots+\frac{A_\lambda}{\sin\pi(z-c_\lambda)}\right]$$

darstellbare Function, und keine andere, die drei Eigenschaften I., II., III^a.

B. Ist $\lambda = 2k$, so ergiebt sich aus (29) mit Benutzung von (16):

$$|F(z)| = a^\zeta e^{\frac{n+2\lambda-m}{2}\pi|\zeta'|}|Z||A_0 + A_1\operatorname{cotg}\pi(z-c_1)+\dots|\Phi.$$

Da $n+2\lambda-m$ keinenfalls negativ sein kann, und der reelle Theil des Exponenten von z (im Ausdrucke Z) für hinreichend grosse Werthe von ζ positiv ausfällt, so ist es, wenn $F(z)$ die Eigenschaft III^a. besitzen soll, jedenfalls nothwendig, dass die beiden Grenzwerthe

$$\lim_{\zeta=\pm\infty}[A_0 + A_1\operatorname{cotg}\pi(z-c_1)+\dots]$$

gleich Null sind. Auf Grund des oben bewiesenen Hülfsatzes erhält $F(z)$ dann die Form

$$(32)\qquad F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z - c_1) \dots$$

$$\dots \sin\pi(z - c_{\lambda-1})\left[\frac{B_1}{\sin\pi(z - c_1)} + \dots + \frac{B_{\lambda-1}}{\sin\pi(z - c_{\lambda-1})}\right].$$

Hieraus folgt mit Benutzung von (16):

$$(33)\qquad |F(z)| = a^{\breve{z}} e^{\frac{n+2(\lambda-2)-m}{2}\pi|\zeta'|} |Z| \left| B_1 \frac{\sin\pi(z-c_{\lambda-1})}{\sin\pi(z-c_1)} + \dots + B_{\lambda-1}\frac{\sin\pi(z-c_{\lambda-1})}{\sin\pi(z-c_{\lambda-1})}\right|.$$

Weil $n + 2(\lambda - 2) - m < -2$ ist, so ist $\lim\limits_{\zeta'=\pm\infty} F(z) = 0$, wenn der reelle Theil von z auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt wird. Ist also die durch (28) definirte Zahl λ grade, so besitzt jede in der Form (32) darstellbare Function, und keine andere, alle drei Eigenschaften I., II., III[a].

Die unter A und B erhaltenen Resultate können folgendermassen zusammengefasst werden:

Bezeichnet p die grösste in λ enthaltene ungrade Zahl, so besitzt jede in der Form

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z - c_1) \dots \sin\pi(z - c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z - c_1)} + \dots + \frac{A_p}{\sin\pi(z - c_p)}\right]$$

darstellbare Function, und keine andere, die drei Eigenschaften I., II., III[a].

Die Zahl p kann offenbar auch dadurch charakterisirt werden, dass sie die kleinste ungrade Zahl ist, für welche $2(p + 1) + n$ nicht kleiner ist als m, d. h. die kleinste ungrade Zahl, für welche $\lim\limits_{z=\infty} \frac{\mathbf{r}(z)}{z^{2(p+1)}}$ endlich ist. Bringt man $m - n$ auf die Form

$$m - n = 4q + r, \qquad \binom{q=0,1,2,\dots,\infty}{r=1,2,3,4}$$

so ist immer $p = 2q + 1$.

Die Resultate unserer obigen Untersuchungen können nun folgendermassen zusammengefasst werden:

Es sei a eine positive Zahl und die Gradzahl des Zählers der rationalen Function

$$\mathbf{r}(z) = a\frac{(z - z_1)\ldots(z - z_m)}{(z - z_1')\ldots(z - z_n')}$$

grösser als die des Nenners ($m > n$), *sowie p die kleinste ungrade Zahl, für welche* $\lim\limits_{z=\infty} \frac{\mathbf{r}(z)}{z^{2(p+1)}}$ *endlich ist. Ferner seien* $c_1, \ldots, c_p$ *beliebige Constanten, welche jedoch die Bedingung erfüllen, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl ist. Dann hat jede in der Form*

$$(34)\quad F(z) = a\,\mathbf{F}(z)\sin\pi(z - c_1)\ldots\sin\pi(z - c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_p}{\sin\pi(z - c_p)}\right],$$

wo

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\Gamma(z - z_1)\ldots\Gamma(z - z_m)}{\Gamma(z - z_1')\ldots\Gamma(z - z_n')}$$

ist, darstellbare Function von $z = \zeta + i\zeta'$ *die folgenden Eigenschaften:*

I. $F(z)$ *befriedigt die Differenzengleichung*

$$F(z + 1) = \mathbf{r}(z)F(z).$$

II. $F(z)$ *verhält sich — unter* β *die in algebraischem Sinne grösste unter den reellen Theilen von* $z_1, \ldots, z_m$ *zu findende Zahl verstanden — im Innern der durch die Bedingung* $\zeta \geqq \beta$ *definirten Hälfte der z-Ebene überall regulär.*

III. *Wird die reelle Zahl* α *im algebraischen Sinne grösser als* β, *sonst aber beliebig angenommen, und die Veränderliche z auf den Parallelstreifen* ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$) *beschränkt, so kann* $F(z)$ *dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.*

Umgekehrt lässt sich auch jede monogene Function, von der man nur weiss, dass sie alle diese Eigenschaften besitzt, bei passender Bestimmung von $A_1, \ldots, A_p$ *auf die Form* (34) *bringen.*

11. Aus den Gleichungen (31) und (33) des vorhergehenden Paragraph ergiebt sich ein Satz, der für die späteren Anwendungen unserer Functionen von grosser Wichtigkeit ist.

Der absolute Betrag der soeben betrachteten Function $F(z)$ lässt sich stets auf eine der beiden Formen (31) oder (33) bringen. Beide Aus-

drücke enthalten einen Factor der Form $e^{-k\frac{\pi}{2}|\zeta'|}$, wo die positive ganze Zahl k wegen (28) jedenfalls nicht kleiner als Eins sein kann. (Das Product der übrigen Factoren nähert sich, wenigstens nach Multiplication mit einer passenden Potenz von $z = \zeta + i\zeta'$, der Grenze Null, wenn $|\zeta'|$ ohne Ende wächst, während ζ auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt wird.) Ist also x eine beliebige Grösse, deren reeller Theil positiv ist, und setzt man $x = e^{\xi + i\xi'}$, $-\frac{\pi}{2} < \xi' < \frac{\pi}{2}$, so ist

$$|x^{-z}|\, e^{-k\frac{\pi}{2}|\zeta'|} = e^{-\xi\zeta + \xi'\zeta' - k\frac{\pi}{2}|\zeta'|}$$

wegen der Ungleichung $\xi' - k\frac{\pi}{2} < 0$ eine Veränderliche, welche mit wachsendem $|\zeta'|$ sich der Grenze Null nähert, wenn ξ und ζ auf ein beliebiges, aber endliches Interwall beschränkt werden. Offenbar hat auch das Product dieser Veränderlichen mit einer beliebigen Potenz von z die genannte Eigenschaft. Hieraus ergiebt sich nun Folgendes:

Beschränkt man die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$ auf einen beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen und die Veränderliche x auf ein endliches Gebiet, dessen sämmtliche Punkte — die an der Grenze mit einbegriffen — positive Abscissen besitzen, so nähert sich die Grösse

$$z^{\mu} x^{-z} F(z),$$

wo $F(z)$ den Ausdruck (34) *und μ eine beliebig gewählte positive Zahl bezeichnet, mit wachsendem $|\zeta'|$ gleichmässig der Grenze Null. Es hat somit das Integral*

$$\varphi(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z} F(z)\, dz, \tag{35}$$

erstreckt längs einer zur imaginären Axe parallelen Geraden $\zeta = c$, nicht nur einen bestimmten Sinn, wenn die betreffende Gerade durch keine Unendlichkeitsstelle von $F(z)$ geht, sondern es ist $\varphi(x)$ auch eine analytische Function von x.

Es wird im letzten Abschnitte bewiesen, dass $\varphi(x)$ einer linearen Differentialgleichung Genüge leistet, wenn c im algebraischen Sinne grösser

ist als die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$; sowie auch, dass $\varphi(x)x^{z-1}$ für ein beliebiges z sich der Grenze Null nähert, falls der reelle Theil von x ohne Ende wächst. Es hat somit auch das Integral

$$\int_0^l \varphi(x)x^{z-1}dx$$

einen bestimmten Sinn, wenn der reelle Theil von z hinreichend gross angenommen wird. Dies Integral kann, was sehr interessant ist, auf die Form $F(z)$ gebracht werden.

12. Unter $c_1, \ldots, c_p$ sind in diesem Paragraphen fortwährend Grössen verstanden, welche die Bedingung erfüllen, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl ist.

Sind $F_1(z), \ldots, F_p(z)$ p Functionen der Form (34), etwa:

$$F_1(z) = a^z\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1^{(1)}}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p^{(1)}}{\sin\pi(z-c_p)}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_p(z) = a^z\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1^{(p)}}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p^{(p)}}{\sin\pi(z-c_p)}\right],$$

so kann, wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & \ldots & A_p^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1^{(p)} & \ldots & A_p^{(p)} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, zwischen denselben offenbar keine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen.

Ist $F(z)$ eine beliebige Function der Form (34), und Δ von Null verschieden, so ist unmittelbar ersichtlich, dass die Constanten $C_1, \ldots, C_p$ immer so bestimmt werden können, dass

$$F(z) = C_1F_1(z) + \ldots + C_pF_p(z)$$

wird.

Nehmen wir $c_1, \ldots, c_p$ von den Nullstellen der Function $\mathbf{F}(z)$ verschieden an, so erhalten $A_1, \ldots, A_p$, wenn $F(c_1), \ldots, F(c_p)$ als gegebene Grössen betrachtet werden, aus den Gleichungen

$$F(c_1) = a^{c_1}\mathbf{F}(c_1)\sin\pi(c_1 - c_2)\ldots\sin\pi(c_1 - c_p)A_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(c_p) = a^{c_p}\mathbf{F}(c_p)\sin\pi(c_p - c_1)\ldots\sin\pi(c_p - c_{p-1})A_p$$

eindeutig bestimmte endliche Werthe. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Eine Function, welche die Bedingungen des in § 10 entwickelten Satzes erfüllt, ist vollständig bestimmt, wenn die Werthe, die sie an p verschiedenen Stellen der angegebenen Art annimmt, bekannt sind.

Besonders bemerkenswerth sind diejenigen Functionen $F(z)$, für welche $p = 1$ ist; was offenbar dann, und nur dann, der Fall ist, wenn $m - n$ gleich irgend einer der Zahlen 1, 2, 3, 4 ist. *In allen diesen Fällen ist $F(z) = Ca^z\mathbf{F}(z)$, also $F(z)$ vollständig bestimmt, wenn ein specieller Werth der Function bekannt ist.*

13. Der Vollständigkeit halber wollen wir jetzt zwei allgemeine Ausdrücke bilden, durch welche sämmtliche, der vorher betrachteten Differenzengleichung $F(z + 1) = \mathbf{r}(z)F(z)$ genügende Functionen ausgedrückt werden können, für die es überhaupt einen zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ giebt, wo sie sich regulär verhalten und, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, dem absoluten Betrage nach nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen können. Die Herleitung derselben braucht hier nur kurz angedeutet werden, weil die dabei in Frage kommenden Schlüsse mit den in § 7 benutzten vollständig übereinstimmen.

Es sei $F(z)$ eine ebensolche Function. Setzt man

$$\phi(z) = \frac{a^{-z}F(z)}{\Gamma(z - z_1)\ldots\Gamma(z - z_m)\Gamma(1 + z_1' - z)\ldots\Gamma(1 + z_n' - z)},$$

so ist $\phi(z + 1) = (-1)^n\phi(z)$. Somit ist $\phi(z)$, weil sie sich im Bereiche $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ regulär verhält, eine ganze Function. Setzt man ferner

$$\Psi(z) = \frac{\phi(z)}{\sin\pi(z - c_1)\ldots\sin\pi(z - c_\lambda)},$$

wo $c_1, \ldots, c_\lambda$ Constanten bezeichnen, so kann diese Function, welche die Eigenschaft $\Psi(z+1) = (-1)^{n+\lambda}\Psi(z)$ besitzt, durch trigonometrische Functionen ausgedrückt werden. Damit sie keine mehrfache Unendlichkeitsstelle besitze, wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass unter den Grössen $c_1, \ldots, c_\lambda$ keine zwei sich finden, deren Differenz gleich einer ganzen Zahl oder Null wäre. Ihre Anzahl λ braucht zunächst nur der Bedingung $2\lambda \geqq m + n$ unterworfen werden. Betrachtet man nun für den Fall, dass $n + \lambda$ grade ist, den Ausdruck

$$G(z) = \Psi(z) - [A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)],$$

für den Fall aber, dass $n + \lambda$ ungrade ist, den Ausdruck

$$G_1(z) = \Psi(z) - \left[\frac{A_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_\lambda}{\sin \pi(z - c_\lambda)}\right],$$

so zeigt sich in ähnlicher Weise wie in § 7, dass G und G_1 bei passender Bestimmung von $A_1, \ldots, A_\lambda$ sich auf constante Grössen reduciren; insbesondere muss $G_1 = 0$ sein.

Für die Function $F(z)$ erhalten wir also, je nachdem $n + \lambda$ grade oder ungrade angenommen wird, die folgenden Ausdrücke:

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \frac{\sin \pi(z - c_1) \ldots \sin \pi(z - c_\lambda)}{\sin \pi(z - z_1') \ldots \sin \pi(z - z_n')} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots$$
$$\ldots + A_\lambda \operatorname{cotg} \pi(z - c_\lambda)], \quad (n+\lambda = 2k)$$

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \frac{\sin \pi(z - c_1) \ldots \sin \pi(z - c_\lambda)}{\sin \pi(z - z_1') \ldots \sin \pi(z - z_n')} \left[\frac{A_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_\lambda}{\sin \pi(z - c_\lambda)}\right], \quad (n+\lambda = 2k+1)$$

wo $\mathbf{F}(z)$ durch Gleichung (34) erklärt wird und $A_0 = G$ ist.

Die obigen Ausdrücke werden am einfachsten, wenn λ die kleinste ganze Zahl bezeichnet, deren doppelter Werth nicht kleiner ist als $m + n$.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir nicht die Bedingungen ermitteln, welche erfüllt sein müssen, damit die obigen Ausdrücke die verlangten Eigenschaften wirklich besitzen mögen. Offenbar besitzen sie jedenfalls die Eigenschaft $F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$.

Ist insbesondere $m = n$, so kann man $\lambda = m$ annehmen, und es erhält dann $F(z)$ die Form:

$$(36)\quad F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \frac{\sin \pi(z - c_1) \ldots \sin \pi(z - c_m)}{\sin \pi(z - z_1') \ldots \sin \pi(z - z_m')} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots$$
$$\ldots + A_m \operatorname{cotg} \pi(z - c_m)].$$

14. Unter den in der Form (36) darstellbaren Functionen müssen einige hervorgehoben werden, da sie für die Theorie gewisser bestimmten Integrale von Wichtigkeit sind. Nehmen wir an, es seien die reellen Theile der Nullstellen des Zählers von $\mathbf{r}(z)$ sämmtlich kleiner als eine gewisse reelle Zahl α, die entsprechenden Grössen im Nenner aber grösser als α, so ist leicht zu sehen, dass jede Function der Form

$$(37)\quad F(z) = \mathbf{F}(z) \frac{\sin \pi(z - c_1) \ldots \sin \pi(z - c_m)}{\sin \pi(z - z_1') \ldots \sin \pi(z - z_m')} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots$$
$$\ldots + A_m \operatorname{cotg} \pi(z - c_m)],$$

wenn z auf den Parallelstreifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ beschränkt wird, sich regulär verhält und, nach Multiplication mit z^{-x}, dem absoluten Betrage nach nicht ohne Ende wachsen kann. Verlangt man aber, es soll $F(z)$ die letzte Eigenschaft besitzen, auch ohne dass man sie mit einer Potenz von z multiplicirt, so muss der letzte Factor von $F(z)$ für $\zeta' = \pm \infty$ gleich Null sein. — Wegen unserer Voraussetzung über die Null- und Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{r}(z)$ ist nämlich der reelle Theil von x positiv, und somit (§ 9) $\lim\limits_{\zeta' = \pm\infty} \mathbf{F}(z) = \infty$. — Aus

$$\lim_{\zeta' = \pm\infty} [A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \ldots + A_m \operatorname{cotg} \pi(z - c_m)] = 0$$

folgt aber $A_0 = 0$, $A_m = -A_1 - A_2 - \ldots - A_{m-1}$. Setzt man diese Werthe in (37) ein, so bekommt man einen Ausdruck der Form:

$$F(z) = \mathbf{F}(z) \frac{\sin \pi(z - c_1) \ldots \sin \pi(z - c_{m-1})}{\sin \pi(z - z_1') \ldots \sin \pi(z - z_m')} \left[\frac{B_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{B_{m-1}}{\sin \pi(z - c_{m-1})}\right].$$

Es ergiebt sich leicht, dass jede Function dieser Form, die oben verlangten Eigenschaften besitzt, wenn die bezüglich der Grössen $z_1, \ldots, z_m, z_1', \ldots, z_m'$ gemachte Voraussetzung erfüllt ist. Damit ist nun folgender Satz bewiesen:

In der rationalen Function

$$\mathbf{r}(z) = \frac{(z - z_1) \ldots (z - z_m)}{(z - z_1') \ldots (z - z_m')}$$

seien die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$ *kleiner als* α, *und die reellen Theile von* $z_1', \ldots, z_m'$ *grösser als* α. *Ferner seien* $c_1, \ldots, c_{m-1}$ *beliebige Constanten, welche doch die Bedingung erfüllen, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl ist. Dann hat jede in der Form*

$$(38) \quad F(z) = \mathbf{F}(z) \frac{\sin \pi(z - c_1) \ldots \sin \pi(z - c_{m-1})}{\sin \pi(z - z_1') \ldots \sin \pi(z - z_m')} \left[\frac{A_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{\sin \pi(z - c_{m-1})} \right],$$

wo

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\Gamma(z - z_1) \ldots \Gamma(z - z_m)}{\Gamma(z - z_1') \ldots \Gamma(z - z_m')}$$

ist, darstellbare Function von $z = \zeta + i\zeta'$ *die folgenden Eigenschaften:*

I. $F(z)$ *befriedigt die Differenzengleichung*

$$F(z + 1) = \mathbf{r}(z) F(z).$$

II. $F(z)$ *verhält sich an jeder Stelle des Parallelstreifens* $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ *regulär.*

III. *Wird die Veränderliche* z *auf den genannten Parallelstreifen beschränkt, so kann der absolute Betrag von* $F(z)$ *nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.*

Umgekehrt lässt sich auch jede monogene Function, von der man nur weiss, dass sie alle diese Eigenschaften besitzt, bei passender Bestimmung von $A_1, \ldots, A_{m-1}$ *auf die Form* (38) *bringen.*

Eine Function, welche die obigen Eigenschaften besitzt, ist offenbar vollständig bestimmt, wenn die Werthe, die sie an $m - 1$ verschiedenen Stellen des Bereichs $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ annimmt, bekannt sind.

III.

Functionen, welche lineare nicht homogene Differenzengleichungen erster Ordnung befriedigen.

15. Jede lineare Differenzengleichung erster Ordnung kann auf die Form

$$\mathbf{r}_1(z)F(z+1) = \mathbf{r}_0(z)F(z) - \mathbf{s}_0(z)$$

gebracht werden. Setzt man

$$\mathbf{r}(z) = \frac{\mathbf{r}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)}, \qquad \mathbf{s}(z) = \frac{\mathbf{s}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)},$$

so erhält sie die Gestalt

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z) - \mathbf{s}(z). \tag{39}$$

In der vorliegenden Arbeit bezeichnen $\mathbf{r}_0(z)$, $\mathbf{r}_1(z)$, $\mathbf{s}_0(z)$ stets ganze rationale Functionen, und somit $\mathbf{r}(z)$ und $\mathbf{s}(z)$ rationale Functionen *mit demselben Nenner*. Dieselben wollen wir jetzt gewissen Beschränkungen unterwerfen, die theils durch die Ergebnisse des vorhergehenden, theils erst durch die des letzten Abschnittes gerechtfertigt werden können. Erstens nehmen wir an, dass die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{r}(z)$ nicht kleiner als die des Nenners sei. Zweitens soll, wenn $\mathbf{r}(z)$ auf die Form

$$\mathbf{r}(z) = a\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_m)}{(z-z_1')\ldots(z-z_n')}$$

gebracht wird, die Grösse a eine reelle positive Zahl sein. Schliesslich soll $\mathbf{s}(z)$ die Bedingung

$$\lim_{z=\infty}\frac{\mathbf{s}(z)}{\mathbf{r}(z)} = 0$$

erfüllen; die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{s}(z)$ soll m. a. W., unter m die des Zählers von $\mathbf{r}(z)$ verstanden, höchstens gleich $m-1$ sein.

Die im Vorhergehenden behandelte Gleichung $F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$ kann gewissermassen als ein specieller Fall von (39) aufgefasst werden.

Es fragt sich nun, ob es auch Functionen existiren, welche die Gleichung (39) befriedigen und im übrigen sich in ähnlicher Weise verhalten, wie die der Gleichung $F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$ genügenden und im vorigen Abschnitte in der Form [1]

$$(40) \qquad a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right]$$

dargestellten Functionen. In den folgenden Paragraphen wird diese Frage für die wichtigsten Fälle ($\lim \mathbf{r}(z) \geqq 1$) erledigt. Es sei $F(z)$ eine analytische Function mit den nachstehenden Eigenschaften:

I. $F(z)$ befriedigt die Differenzengleichung

$$(41) \qquad F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z) - \mathbf{s}(z),$$

wo $\mathbf{r}(z)$ und $\mathbf{s}(z)$ gegebene rationale Functionen der oben angegebenen Beschaffenheit bezeichnen.

II. In der Umgebung jeder endlichen Stelle, deren reeller Theil im algebraischen Sinne grösser ist als die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$, verhält sich $F(z)$ regulär.

III. Wird die reelle Zahl α algebraisch grösser als die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$, sonst aber beliebig angenommen, und die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$ auf den Parallelstreifen ($\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1$) beschränkt, so kann der absolute Betrag von $F(z)$ nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen; wobei zu bemerken ist, dass in den Fällen, wo $m = n$ ist, nur gefordert wird, dass $F(z)$, wenigstens nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, die angeführte Eigenschaft besitzen soll.

Die Aufgabe, alle analytischen Functionen mit diesen Eigenschaften zu bestimmen, vereinfacht sich sehr wegen des folgenden Satzes:

Kennt man eine Function $\mathbf{S}(z)$, *welche die obigen Eigenschaften besitzt, so kann jede andere Function* $F(z)$ *mit denselben Eigenschaften auf die Form* $f(z) + \mathbf{S}(z)$, *wo* $f(z)$ *den Ausdruck* (40) *bezeichnet, gebracht werden.*

Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn man den in § 10 (resp. § 9) bewiesenen Satz auf die Differenz $F(z) - \mathbf{S}(z)$ anwendet.

---

[1] Ist $m = n$, so ist stets $p = 1$ zu setzen. $\mathbf{F}(z)$ hat dieselbe Bedeutung wie im vorigen Abschnitte.

Betrachtet man nun die Reihe

$$(42)\qquad \mathbf{S}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)},$$

so erhellt aus ihrer einfachen Form, dass sie in allen Fällen, wo sie convergirt, der Differenzengleichung (41) Genüge leistet. Auf Grund des obigen Satzes ist es daher von Wichtigkeit zu wissen, unter welchen Bedingungen sie convergirt, und ob sie dann auch die Eigenschaften II. und III. besitze.

16. Setzt man

$$\phi(z)=\frac{az^{m-n}}{\mathbf{r}(z)},$$

so ist $\phi(z)$ eine Grösse, die sich der Grenze Eins nähert, wenn $|z|$ ohne Ende wächst. Durch eine einfache Rechnung folgt für hinreichend grosse Werthe von $|z|$:

$$\phi(z)=1-\frac{\varkappa}{z}+\frac{\varkappa_1}{z^2}+\ldots,$$

wo die $\varkappa$ von z unabhängige Werthe haben; insbesondere hat $\varkappa$ den Werth

$$\varkappa=z'_1+\ldots+z'_n-z_1-\ldots-z_m.$$

Setzt man

$$\Psi(z)=\phi(z)\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\varkappa},$$

so kann $\Psi(z)$ für hinreichend grosse Werthe von $|z|$ in eine Reihe der Form

$$\Psi(z)=1+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\ldots,$$

wo die a von z unabhängig sind, entwickelt werden. Die Function $\mathbf{r}(z)$ kann nun folgenderweise geschrieben werden:

$$\mathbf{r}(z)=\frac{az^{m-n}}{\Psi(z)}\left(\frac{z+1}{z}\right)^{\varkappa}.$$

Schreibt man in dieser Gleichung statt z nach einander $z, z+1, \ldots z+\nu-1$, so ergiebt sich, indem man die so erhaltenen Resultate durch, Multiplication mit einander vereinigt,

$$(43)\qquad \frac{1}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu-1)} = \frac{\Psi(z)\Psi(z+1)\ldots\Psi(z+\nu-1)}{a^\nu[z(z+1)\ldots(z+\nu-1)]^{m-n}}\left(\frac{z}{z+\nu}\right)^x.$$

Setzt man ferner, unter $m-k$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{s}(z)$ verstehend,

$$(44)\qquad \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z+\nu)} = \frac{\Phi(z+\nu)}{(z+\nu)^k},$$

so ist $\Phi(z)$ eine Grösse, die sich einer endlichen von Null verschiedenen Grenze nähert, wenn z dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst. Zur Abkürzung setzen wir schliesslich

$$(45)\qquad \Phi_\nu(z) = \Phi(z+\nu)\Psi(z)\ldots\Psi(z+\nu-1). \qquad {\scriptstyle(\nu=0,1,2,\ldots,\infty)}$$

Auf Grund des in § 1 bewiesenen Hülfsatzes und wegen der Definition von $\Phi(z)$ hat $\Phi_\nu(z)$ die folgende Eigenschaft. Wird die Veränderliche $z=\zeta+i\zeta'$, unter α eine beliebige reelle Zahl verstanden, auf die durch die Bedingung $\zeta \geqq \alpha$ definirten Hälfte der z-Ebene beschränkt, so kann eine positive ganze Zahl μ stets so gross angenommen werden, dass der absolute Betrag von $\Phi_\nu(z+\mu)$ für $\nu=0, 1, 2, \ldots, \infty$ weder unbeschränkt wachsen noch abnehmen kann. Es giebt m. a. W. zwei von Null verschiedene Grössen A und B $(A<B)$, welche die Bedingung

$$A < |\Phi_\nu(z+\mu)| < B$$

für $\nu=0, 1, 2, \ldots, \infty$ erfüllen, falls z auf das Gebiet $\zeta \geqq \alpha$ beschränkt und μ hinreichend gross angenommen wird.

Mit Hülfe der Gleichungen (43), (44) und (45) kann nun die im vorigen Paragraphen aufgestellte Reihe $\mathbf{S}(z)$ auf die folgende Form gebracht werden:

$$(46)\qquad \mathbf{S}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(z)}{(z+\nu)^k}\left(\frac{z}{z+\nu}\right)^x \frac{1}{a^\nu[z(z+1)\ldots(z+\nu-1)]^{m-n}}.$$

Aus der einfachen Form (42) der Reihe $\mathbf{S}(z)$ ergiebt sich, wenn μ eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet:

$$(47)\quad \mathbf{S}(z) = \frac{\mathbf{s}(z)}{\mathbf{r}(z)} + \frac{\mathbf{s}(z+1)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)} + \ldots + \frac{\mathbf{s}(z+\mu-1)}{\mathbf{r}(z)\ldots\mathbf{r}(z+\mu-1)} + \frac{\mathbf{S}(z+\mu)}{\mathbf{r}(z)\ldots\mathbf{r}(z+\mu-1)}.$$

Auf Grund der obigen Entwickelungen ergiebt sich nun Folgendes:

Erstens: Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$, d. h. entweder $m > n$ oder $m = n$ und gleichzeitig $a > 1$, so ist $\mathbf{S}(z)$ in der Umgebung jeder endlichen, von den Wurzeln der Gleichungen $\mathbf{r}(z+\nu) = 0$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, verschiedenen Stelle unbedingt und gleichmässig convergent. Nähert sich z, unter α eine beliebig gegebene reelle Zahl verstanden, in der durch die Bedingung $\zeta \geqq \alpha$ definirten Hälfte der z-Ebene der Stelle ∞, so nähert sich $\mathbf{S}(z)$ gleichzeitig der Grenze Null.

Ist beispielsweise $m = n$ und $a > 1$, welche Annahme den für unsere Behauptungen ungünstigsten Fall bildet, so kann vorausgesetzt werden, es sei μ so gross angenommen, dass $\Phi_\nu(z+\mu)$ für $\zeta \geqq \alpha$ endlich bleibt, wie gross auch ν werden mag. Es sei gleichzeitig μ so gross, dass $\alpha + \mu$, und somit auch der reelle Theil von $z + \mu$, grösser als Eins ist. Alsdann hat man

$$\left|\log\left(1 - \frac{\nu}{z+\mu+\nu}\right)\right| \leqq -\log\left(1 - \left|\frac{\nu}{z+\mu+\nu}\right|\right) < -\log\left(1 - \frac{\nu}{\nu+1}\right)$$

$$= \log(\nu + 1),$$

und daher

$$\left|\left(\frac{z+\mu}{z+\mu+\nu}\right)^x\right| \leqq e^{|x|\left|\log\left(1-\frac{\nu}{z+\mu+\nu}\right)\right|} < (\nu+1)^{|x|}.$$

Auf Grund dieser Ungleichung ergiebt sich aus (46), wenn darin statt z $z + \mu$ geschrieben wird:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{s}(z+\mu+\nu)}{\mathbf{r}(z+\mu)\ldots\mathbf{r}(z+\mu+\nu)}\right| < \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{\Phi_\nu(z+\mu)}{(z+\mu+\nu)^k}\right|\frac{(\nu+1)^{|x|}}{a^\nu}.$$

Da die letzte Reihe für das ganze Gebiet $\zeta \geqq \alpha$ unbedingt und gleichmässig convergirt und sich der Grenze Null nähert, wenn $|z|$ gemäss der Bedingung $\zeta \geqq \alpha$ ohne Ende wächst, so geht aus (47) die Richtigkeit unserer Behauptungen unmittelbar hervor.

Ist also $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$, so stellt die Reihe $\mathbf{S}(z)$ immer eine Function dar, welche die im vorigen Paragraphen unter I., II. und III. erwähnten Eigenschaften besitzt.

Zweitens: Ist $m = n$ und $a < 1$, also $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) < 1$, so divergirt die Reihe $\mathbf{S}(z)$, weil ihr allgemeines Glied eine mit der Ordnungszahl unbeschränkt wachsende Grösse ist.[1]

Drittens: Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, also $m = n$ und $a = 1$, so hängt die Convergenz der Reihe $\mathbf{S}(z)$ von den Zahlen $\varkappa$ und k in folgender Weise ab. Ist $\varkappa > -k + 1$, so ist $\mathbf{S}(z)$ in der Umgebung jeder endlichen von den Wurzeln der Gleichungen $\mathbf{r}(z + \nu) = 0$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, verschiedenen Stelle unbedingt und gleichmässig convergent, und wird, wenigstens nach Multiplication mit $z^{-\varkappa}$, unendlich klein, wenn die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$, unter α eine beliebige reelle Zahl verstanden, in der durch die Bedingung $\zeta \geq \alpha$ definirten Hälfte der z-Ebene sich der Stelle ∞ nähert. Dies erhellt leicht aus

$$\mathbf{S}(z) = z^{\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(z)}{(z+\nu)^{\varkappa+k}}.$$

Ist aber $\varkappa \leq -k + 1$, so ist $\mathbf{S}(z)$ stets eine divergirende Reihe. Dies ergiebt sich auf Grund eines bekannten Satzes,[2] weil der Quotient des $\nu + 1^{\text{ten}}$ Gliedes der Reihe durch das ν^{te} für hinreichend grosse Werthe von ν in eine Reihe der Form

$$1 - \frac{\varkappa + k}{\nu} + \frac{\varphi_2(z)}{\nu^2} + \ldots$$

entwickelt werden kann.

Ist also $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, so wird durch die Reihe $\mathbf{S}(z)$ eine Function mit den Eigenschaften I., II., III. (§ 15) nur in dem Falle dargestellt, dass $\varkappa > -k + 1$ ist.

Es ist in vielen Fällen vortheilhaft, den Zähler von $\mathbf{s}(z)$ als eine ganze rationale Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades mit *unbestimmten Coefficienten* betrachten zu können. Soll $\mathbf{S}(z)$ im Falle $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, auch wenn die genannten Coefficienten als unbestimmte Grössen betrachtet werden, die Eigenschaften I., II. und III. besitzen, so ist es offenbar nothwendig, und zugleich auch hinreichend, dass der reelle Theil von $\varkappa > 0$ ist.

---

[1] Offenbar ist dies auch der Fall, wenn $m < n$ ist, also jedenfalls wenn $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) < 1$.

[2] C. f. Weierstrass. *Functionenlehre*. S. 220.

Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass es, bei den Anwendungen unserer Sätze in der Theorie der bestimmten Integrale, im Allgemeinen nicht nothwendig ist, die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{s}(z)$ grösser als $m-2$ vorauszusetzen, wenn gleichzeitig $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z)=1$ ist. Alsdann besitzt die Reihe $\mathbf{S}(z)$ die oft erwähnten Eigenschaften, wenn zugleich der reelle Theil von $z>-1$ ist.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich der folgende Satz:

Bezeichnen $\mathbf{r}(z)$ *und* $\mathbf{s}(z)$ *rationale Functionen der in* § 15 *angegebenen Beschaffenheit, und wird der Zähler von* $\mathbf{s}(z)$ *als eine unbestimmte ganze Function beziehungsweise* $(m-1)^{\text{ten}}$ *oder* $(m-2)^{\text{ten}}$ *Grades betrachtet, je nachdem* $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z)$ *grösser als oder gleich Eins ist, so ist die Reihe*

$$\mathbf{S}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$

im ersten Falle stets, im zweiten Falle aber nur dann convergent, wenn der reelle Theil von $z>-1$ *ist. Im Falle der Convergenz stellt sie immer eine Function dar, welche alle drei in* § 15 *unter* I., II. *und* III. *erwähnten Eigenschaften besitzt.*

Aus dem in § 15 enthaltenen Satze ergiebt sich der Folgende:

Weiss man von einer irgend wie definirten monogenen Function $F(z)$ *dass sie die fraglichen Eigenschaften besitzt, so kann sie auf die Form*

$$(48)\quad F(z)=a\,\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\ldots+\frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right]$$
$$+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$

gebracht werden, wenn die für die Convergenz von $\mathbf{S}(z)$ *erforderlichen Bedingungen erfüllt sind.*

Dieser Ausdruck enthält $p+m$, eventuel $p+m-1$, unbestimmte Constanten.

17. Im Zusammenhange mit der Reihe $\mathbf{S}(z)$ wollen wir jetzt auch die folgende betrachten:

$$\mathbf{S}_1(z) = \mathbf{s}(z-1) + \mathbf{s}(z-2)\mathbf{r}(z-1) + \mathbf{s}(z-3)\mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2) + \ldots,$$

welche im Falle der Convergenz offenbar die Differenzengleichung

$$\mathbf{S}_1(z+1) = \mathbf{r}(z)\mathbf{S}_1(z) + \mathbf{s}(z)$$

befriedigt und nur an den Stellen

$$z = z'_\lambda + 1\,,\; z'_\lambda + 2\,,\; z'_\lambda + 3\,, \ldots, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

unendlich werden kann.

Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z)$ nicht gleich Eins, so convergirt offenbar stets eine von den beiden Reihen $\mathbf{S}(z)$ und $\mathbf{S}_1(z)$, aber nicht beide gleichzeitig.

Ist dagegen $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, so convergiren oder divergiren sie beide gleichzeitig.

Um dies zu finden schreibe man in Gleichung (43), wo $m = n$ und $a = 1$ zu setzen ist, statt z $z - \nu$. Dann bekommt man die Gleichung

$$\mathbf{r}(z-1)\ldots\mathbf{r}(z-\nu) = \left(\frac{z}{z-\nu}\right)^{\varkappa} \frac{1}{\Psi(z-1)\ldots\Psi(z-\nu)}. \tag{49}$$

Setzt man ferner, unter $m - k$ die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{s}(z)$ verstehend:

$$\mathbf{s}(z-\nu-1) = \frac{\Phi(z-\nu)}{(z-\nu)^k},$$

so ist $\lim\limits_{z=\infty} \Phi(z)$ endlich und von Null verschieden. Das $(\nu+1)^{\text{te}}$ Glied von $\mathbf{S}_1(z)$ kann nun auf die Form

$$\mathbf{s}(z-\nu-1)\mathbf{r}(z-1)\ldots\mathbf{r}(z-\nu) = \frac{\Phi_\nu(z)}{(z-\nu)^k}\left(\frac{z}{z-\nu}\right)^{\varkappa}$$

gebracht werden, wo zur Abkürzung

$$\frac{\Phi(z-\nu)}{\Psi(z-1)\ldots\Psi(z-\nu)} = \Phi_\nu(z)$$

gesetzt worden ist. Auf Grund des in § 1 bewiesenen Hülfsatzes und wegen der Definition von $\Phi(z)$ hat $\Phi_\nu(z)$ die folgende Eigenschaft. Wird

die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$, unter α eine beliebige reelle Zahl verstanden, auf die durch die Bedingung $\zeta \leqq \alpha$ definirten Hälfte der z-Ebene beschränkt, so kann eine positive ganze Zahl μ stets so gross angenommen werden, dass der absolute Betrag von $\Phi_\nu(z - \mu)$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ weder unbeschränkt wachsen noch abnehmen kann. Beachtet man ausserdem, dass $\mathbf{S}_1(z)$ und $\mathbf{S}_1(z - \mu)$ beide gleichzeitig entweder convergiren oder divergiren, so geht die Richtigkeit unserer Behauptung leicht hervor.

Es sei $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und der Zähler von $\mathbf{s}(z)$ eine unbestimmte ganze Function $(m - 2)^{\text{ten}}$ Grades. Setzt man $f(z) = \mathbf{S}(z) + \mathbf{S}_1(z)$ so ist $f(z + 1) = \mathbf{r}(z) f(z)$. Um den in § 14 bewiesenen Satz anwenden zu können, setzen wir ferner voraus, dass die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$ sämmtlich kleiner als α, die reellen Theile von $z'_1, \ldots, z'_m$ aber sämmtlich grösser als α sind, wobei α eine gewisse reelle Zahl bedeutet. Alsdann ist der reelle Theil von $\varkappa > 0$, und somit $\mathbf{S}(z)$ und $\mathbf{S}_1(z)$ beide convergent. Ferner verhält sich die Summe $f(z)$ offenbar in dem Parallelstreifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ überall regulär, und ihr absoluter Betrag kann daselbst auch nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Wegen des in § 14 bewiesenen Satzes kann also $f(z)$ auf die Form (38) gebracht werden.

18. Im Vorhergehenden ist es unentschieden geblieben, ob es, wenn $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) < 1$ oder wenn $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und zugleich der reelle Theil von $\varkappa \leqq -1$ ist, überhaupt Functionen giebt, welche die in § 15 unter I., II., III. erwähnten Eigenschaften besitzen. Bei dieser Gelegenheit sei bezüglich des Falles $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) < 1$ nur bemerkt, dass die Untersuchung desselben mit Hülfe der vorher betrachteten Reihe $\mathbf{S}_1(z)$ bewerkstelligt werden kann. Von weit grösserem Interesse ist der Fall, wo $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und zugleich der reelle Theil von $\varkappa < 0$ ist. In diesem Falle giebt es m von einander linear unabhängige, der Differenzengleichung

$$F(z + 1) = \mathbf{r}(z) F(z) - \mathbf{s}(z)$$

genügende Partialbruchreihen, mit deren Hülfe man stets eine homogene lineare Function bilden kann, welche die fragliche Gleichung befriedigt, auch wenn der Zähler von $\mathbf{s}(z)$ als eine beliebig gegebene Function $(m - 2)^{\text{ten}}$ Grades betrachtet wird. Der Fall $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$ braucht zu-

nächst nicht von dem soeben erwähnten getrennt werden. Es wird daher vorausgesetzt, es sei $\lim \mathbf{r}(z)$ entweder > 1 oder $= 1$, im letzten Falle aber zugleich $\varkappa < 0$.

Es erweist sich als nothwendig die Ordnungszahlen der von einander verschiedenen Nullstellen von $\mathbf{r}(z)$ zu beachten. Zu dem Ende setzen wir

$$\mathbf{r}(z) = a\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_m)}{(z-z_1')\ldots(z-z_n')} = a\frac{(z-\alpha_1)^{\mu_1}\ldots(z-\alpha_\rho)^{\mu_\rho}}{(z-\beta_1)^{\nu_1}\ldots(z-\beta_\sigma)^{\nu_\sigma}}$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ lauter von einander verschiedene Grössen bezeichnen. Von nun an werden auch die folgenden Bezeichnungen festgesetzt (beziehungsweise beibehalten):

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z_1')\ldots\Gamma(z-z_n')} = \frac{\Gamma^{\mu_1}(z-\alpha_1)\ldots\Gamma^{\mu_\rho}(z-\alpha_\rho)}{\Gamma^{\nu_1}(z-\beta_1)\ldots\Gamma^{\nu_\sigma}(z-\beta_\sigma)},$$

$$\mathbf{r}_0(z) = a(z-z_1)\ldots(z-z_m) = a(z-\alpha_1)^{\mu_1}\ldots(z-\alpha_\rho)^{\mu_\rho},$$

$$\mathbf{r}_1(z) = (z-z_1')\ldots(z-z_n') = (z-\beta_1)^{\nu_1}\ldots(z-\beta_\sigma)^{\nu_\sigma},$$

$$\mathbf{r}(z) = \frac{\mathbf{r}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)}, \qquad \mathbf{s}(z) = \frac{\mathbf{s}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)}, \qquad \mathbf{R}(z) = \frac{1}{\mathbf{r}(z)},$$

$$\varkappa = z_1' + \ldots + z_n' - z_1 - \ldots - z_m = \nu_1\beta_1 + \ldots + \nu_\sigma\beta_\sigma - \mu_1\alpha_1 - \ldots - \mu_\rho\alpha_\rho.$$

Der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, dass unter den Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ keine zwei sich finden, deren Differenz gleich einer ganzen Zahl ist. Was weiterhin unter dieser Voraussetzung nachgewiesen wird, das gilt mit unwesentlichen Modificationen auch für den Fall, wo zwei oder mehrere der genannten Grössen sich um ganze Zahlen von einander unterscheiden.

Es sei α irgend eine von den Nullstellen von $\mathbf{r}(z)$ und μ die zugehörige Ordnungszahl. Versucht man die Differenzengleichung

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z) - \mathbf{s}(z)$$

oder

$$\mathbf{r}_0(z)F(z) - \mathbf{r}_1(z)F(z+1) = \mathbf{s}_0(z),$$

wo $\mathbf{s}_0(z)$ zunächst nur irgend eine ganze, rationale oder transcendente, Function bezeichnen mag, durch eine Partialbruchreihe der Form

$$\mathbf{S}(z:\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu} + \ldots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu} + g_\nu(z)\right].$$

wo die $g_\nu(z)$ ganze rationale Functionen bedeuten, zu befriedigen, so findet man,[1] dass dies immer und nur dann möglich ist, wenn die Constanten A mittelst der Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&A_\mu^{(\nu)} = \mathbf{R}(\alpha-\nu)A_\mu^{(\nu-1)},\\
&A_{\mu-1}^{(\nu)} = \mathbf{R}'(\alpha-\nu)A_\mu^{(\nu-1)} + \mathbf{R}(\alpha-\nu)A_{\mu-1}^{(\nu-1)},\\
(50)\qquad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_1^{(\nu)} = \frac{\mathbf{R}^{(\mu-1)}(\alpha-\nu)}{|\underline{\mu-1}}A_\mu^{(\nu-1)} + \frac{\mathbf{R}^{(\mu-2)}(\alpha-\nu)}{|\underline{\mu-2}}A_{\mu-1}^{(\nu-1)} + \ldots + \mathbf{R}(\alpha-\nu)A_1^{(\nu-1)}\\
&\qquad\qquad (\nu=1,2,3,\ldots,\infty)
\end{aligned}
$$

bestimmt werden. Die obigen Gleichungen drücken in der That die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass eine jede der unendlich vielen rationalen Functionen

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r}_0(z)\left(\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\ldots+\frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu}+g_\nu(z)\right)\\
&-\mathbf{r}_1(z)\left(\frac{A_\mu^{(\nu-1)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\ldots+\frac{A_1^{(\nu-1)}}{z-\alpha+\nu}+g_{\nu-1}(z)\right),\qquad (\nu=1,2,\ldots,\infty)
\end{aligned}
$$

welche als Glieder des Ausdruckes $\mathbf{r}_0(z)\mathbf{S}(z)-\mathbf{r}_1(z)\mathbf{S}(z+1)$ anzusehen sind, eine ganze Function sein soll, und dies ist wiederum, wegen unserer Voraussetzung über die Null- und Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{r}(z)$, dann und nur dann der Fall, wenn eine jede der Functionen

$$
\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\ldots+\frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu}-\mathbf{R}(z)\left(\frac{A_\mu^{(\nu-1)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\ldots+\frac{A_1^{(\nu-1)}}{z-\alpha+\nu}\right)\qquad (\nu=1,2,\ldots,\infty)
$$

bezüglich nach positiven ganzen potenzen von $z-\alpha+\nu$, $\nu=1,2,\ldots,\infty$, entwickelt werden kann. Entwickelt man nun diesen Ausdruck nach ganzen Potenzen von $z-\alpha+\nu$ und setzt die Coefficienten der negativen Potenzen gleich Null, so bekommt man in der That die Gleichungen (50).

Vermöge der Gleichungen (50) bestimmen sich $A_\mu^{(\nu)},\ldots,A_1^{(\nu)}$ ($\nu=1,2,\ldots,\infty$) als homogene lineare Functionen von $A_\mu^{(0)},\ldots,A_1^{(0)}$, denen man aber beliebige Werthe ertheilen kann. Dem Mittag-Leffler'schen

---

[1] C. f. *Zur Theorie der Gammafunction.* Bd. 8 dieses Journals S. 48.

Satze gemäss können nachher die $g_\nu(z)$ immer so angenommen werden, dass $\mathbf{S}(z;\alpha)$ eine gleichmässig convergirende Reihe wird.

Die in den Gliedern von $\mathbf{S}(z;\alpha)$ vorkommenden ganzen Functionen $g_\nu(z)$ können alle identisch gleich Null gesetzt werden, falls die so entstehende Reihe gleichmässig convergirt. Dies ist stets der Fall, wenn $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$ ist, was in meiner Arbeit *Zur Theorie der Gammafunction* nachgewiesen ist. Der Beweis soll jetzt so geführt werden, dass die Convergenz der Reihe

$$(51) \qquad \mathbf{S}(z;\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu} + \ldots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu}\right)$$

auch in dem Falle ersichtlich wird, wo $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und gleichzeitig der reelle Theil von $x < 0$ ist. Es soll weiterhin unter $\mathbf{S}(z;\alpha)$ immer eine Reihe der Form (51) verstanden werden, deren Constanten A die Bedingungen (50) erfüllen.

Wird $\mathbf{R}(z)$ in der bekannten Form einer Summe von Partialbrüchen und einer ganzen Function dargestellt, so muss die ganze Function, weil $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) \geq 1$ ist, sich auf eine Constante reduciren. Werden sodann durch Differentiation ähnliche Ausdrücke für die Ableitungen von $\mathbf{R}(z)$ entwickelt, so leuchtet unmittelbar ein, dass die entsprechenden ganzen Functionen identisch gleich Null sind, sowie auch, dass die Ungleichungen

$$|\mathbf{R}'(\alpha-\nu)| < \frac{C}{|\alpha-\nu|^2}, \; \ldots \; |\mathbf{R}^{(\mu-1)}(\alpha-\nu)| < \frac{C}{|\alpha-\nu|^2} \qquad (\nu=1,2,\ldots,\infty)$$

bei passender Bestimmung von C stattfinden. Aus den Gleichungen (50) folgt nun

$$|A_\mu^{(\nu)}| = |\mathbf{R}(\alpha-\nu)A_\mu^{(\nu-1)}|$$

$$|A_{\mu-1}^{(\nu)}| \leq \frac{C|A_\mu^{(\nu-1)}|}{|\alpha-\nu|^2} + |\mathbf{R}(\alpha-\nu)A_{\mu-1}^{(\nu-1)}|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|A_1^{(\nu)}| \leq \frac{C|A_\mu^{(\nu-1)}|}{|\alpha-\nu|^2} + \frac{C|A_{\mu-1}^{(\nu-1)}|}{|\alpha-\nu|^2} + \ldots + |\mathbf{R}(\alpha-\nu)A_1^{(\nu-1)}|.$$

Es ist also

$$|A_\mu^{(\nu)}| + \ldots + |A_1^{(\nu)}| < \left(|\mathbf{R}(\alpha - \nu)| + \frac{(\mu - 1)C}{|\alpha - \nu|^2}\right)(|A_\mu^{(\nu-1)}| + \ldots + |A_1^{(\nu-1)}|).$$

Hieraus erhellt nun schon, dass $\mathbf{S}(z;\alpha)$, wenn $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$ ist, unbedingt und gleichmässig convergirt. Ist aber $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, so schreiben wir die obige Ungleichung in folgender Gestalt

$$|A_\mu^{(\nu)}| + \ldots + |A_1^{(\nu)}| < |\mathbf{R}(\alpha-\nu)|\left(1 + \frac{(\mu-1)C|\mathbf{r}(\alpha-\nu)|}{|\alpha-\nu|^2}\right)(|A_\mu^{(\nu-1)}| + \ldots + |A_1^{(\nu-1)}|).$$

Daraus ergiebt sich

$$|A_\mu^{(\nu)}| + \ldots + |A_1^{(\nu)}| < (|A_\mu^{(0)}| + \ldots + |A_1^{(0)}|)\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\nu}|\mathbf{R}(\alpha-\lambda)|\left(1 + \frac{(\mu-1)C|\mathbf{r}(\alpha-\lambda)|}{|\alpha-\lambda|^2}\right).$$

Benutzt man die in § 17 enthaltene Gleichung (49), wo statt z α zu schreiben ist, so folgt

$$|A_\mu^{(\nu)}| + \ldots + |A_1^{(\nu)}| < K\left|\left(\frac{\alpha}{\alpha - \nu}\right)^{-\varkappa}\right|,$$

wenn K eine Zahl bezeichnet, welche die Bedingung

$$(|A_\mu^{(0)}| + \ldots + |A_1^{(0)}|)\prod_{\lambda=0}^{\lambda=\nu}|\Psi(\alpha-\lambda)|\left(1 + \frac{(\mu-1)C|\mathbf{r}(\alpha-\lambda)|}{|\alpha-\lambda|^2}\right) < K$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, \infty$ erfüllt. Es ist somit, wenigstens für hinreichend grosse Werthe von ν:

$$\left|\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z - \alpha + \nu)^\mu} + \ldots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z - \alpha + \nu}\right| < \left|\frac{K}{z - \alpha + \nu}\left(\frac{\alpha}{\alpha - \nu}\right)^{-\varkappa}\right|.$$

Ist also der reelle Theil von $\varkappa < 0$, so ist $\mathbf{S}(z;\alpha)$ auch im Falle $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) = 1$ in der Nähe jeder von $z = \alpha, \alpha - 1, \alpha - 2, \ldots$ verschiedenen Stelle unbedingt und gleichmässig convergent. Es soll bei dieser Gelegenheit nicht näher erörtert werden, ob es auch immer eine für die Convergenz von $\mathbf{S}(z;\alpha)$ nothwendige Bedingung sei, dass der reelle Theil von $\varkappa < 0$ ist. Dass dies aber jedenfalls zur Convergenz *sämmtlicher* zur Stelle $z = \alpha$ gehöriger Reihen $\mathbf{S}(z;\alpha)$ nothwendig ist, geht indessen

durch die Annahme $A_1^{(0)} = 1$, $A_2^{(0)} = 0, \ldots, A_\mu^{(0)} = 0$ leicht hervor. Durch diese Annahme entsteht nämlich eine divergirende Reihe, wenn der reelle Theil von $\varkappa \geqq 0$ ist. Im Nachstehenden sei also dieser Theil < 0, wenn $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ ist.

Es soll jetzt die durch die Gleichung

$$\mathbf{s}_0(z;\alpha) = \mathbf{r}_0(z)\mathbf{S}(z;\alpha) - \mathbf{r}_1(z)\mathbf{S}(z+1;\alpha)$$

definirte ganze Function

$$\mathbf{s}_0(z;\alpha) = \mathbf{r}_0(z)\left(\frac{A_\mu^{(0)}}{(z-\alpha)^\mu} + \ldots + \frac{A_1^{(0)}}{z-\alpha}\right)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\mathbf{r}_0(z)\left(\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\ldots+\frac{A_1^{(\nu)}}{z-\alpha+\nu}\right)-\mathbf{r}_1(z)\left(\frac{A_\mu^{(\nu-1)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\ldots+\frac{A_1^{(\nu-1)}}{z-\alpha+\nu}\right)\right]$$

betrachtet werden. In Folge der Gleichungen (50) ist jedes Glied der rechten Seite eine ganze rationale Function, deren Gradzahl offenbar höchstens gleich $m-1$ sein kann, wenn m wie früher die Gradzahl von $\mathbf{r}_0(z)$ bezeichnet. Da die Reihe $\mathbf{S}(z;\alpha)$ gleichmässig convergirt, so ist dies auch mit der Reihe $\mathbf{s}_0(z;\alpha)$ der Fall, und sie lässt sich somit nach Potenzen von z entwickeln. Dadurch bekommt man aber eine ganze rationale Function von höchstens $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade.

Ist also $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z)$ entweder > 1 oder $= 1$ und im letzten Falle der reelle Theil von $\varkappa < 0$, so befriedigt die Reihe $\mathbf{S}(z;\alpha)$, deren Constanten A durch die Gleichungen (50) *bestimmt sind, eine Gleichung*

$$\mathbf{S}(z+1;\alpha) = \mathbf{r}(z)\mathbf{S}(z;\alpha) - \mathbf{s}(z), \tag{52}$$

wo der Zähler von $\mathbf{s}(z)$ eine ganze rationale Function von höchstens $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Zu diesem Satze gehört der folgende Zusatz: *Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, so ist die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{s}(z)$ niemals grösser als $m-2$.*

Ist nämlich $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$, so ist $\dfrac{\mathbf{r}_0^{(m)}(\alpha-\nu)}{|m} = 1 = \dfrac{\mathbf{r}_1^{(m)}(\alpha-\nu)}{|m}$. Der Coefficient von z^{m-1} im $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Gliede der Reihe $\mathbf{s}_0(z;\alpha)$ wird daher gleich $A_1^{(\nu)} - A_1^{(\nu-1)}$, während er im ersten Gliede den Werth $A_1^{(0)}$ hat.

Ordnet man also die ganze Reihe nach Potenzen von z, so erhält der Coefficient von z^{m-1} den Werth

$$A_1^{(0)} + (A_1^{(1)} - A_1^{(0)}) + (A_1^{(2)} - A_1^{(1)}) + \ldots = 0.$$

19. Nach dem Vorhergehenden gehören offenbar zu jeder μ-fachen Nullstelle $z = \alpha$ der rationalen Function $\mathbf{r}(z)$ μ von einander linear unabhängige Partialbruchreihen $\mathbf{S}(z;\alpha)$, welche die Gleichung (52) befriedigen und durch welche jede andere zu derselben Stelle gehörige Reihe als homogene lineare Function ausgedrückt werden kann. Setzt man nach einander $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$, so bekommt man ρ Gruppen von Reihen. Nimmt man aus jeder solchen Gruppe (α) μ linear unabhängige Reihen heraus, so bekommt man im Ganzen $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\rho = m$ linear unabhängige Partialbruchreihen, welche im Folgenden mit $\mathbf{S}_1(z), \ldots, \mathbf{S}_m(z)$ bezeichnet werden sollen. Setzt man, unter $C_1, \ldots, C_m$ constante Grössen verstehend:

$$\mathbf{S}(z) = C_1\mathbf{S}_1(z) + C_2\mathbf{S}_2(z) + \ldots + C_m\mathbf{S}_m(z),$$

so ist offenbar $\mathbf{r}_1(z)\mathbf{S}(z+1) = \mathbf{r}_0(z)\mathbf{S}(z) - \mathbf{s}_0(z)$, wo $\mathbf{s}_0(z)$ eine ganze rationale Function von höchstens $(m-1)^{\text{ten}}$ oder $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade bezeichnet, je nachdem $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$ oder $= 1$ ist. Es muss aber bewiesen werden, dass die Constanten C immer derart bestimmt werden können, dass $\mathbf{s}_0(z)$ gleich jeder beliebigen ganzen Function wird, deren Gradzahl im ersten Falle gleich oder kleiner als $m-1$ und im zweiten Falle gleich oder kleiner als $m-2$ angenommen werden kann. Zu dem Ende bemerken wir zunächst, dass die Reihen $\mathbf{S}_1(z), \ldots, \mathbf{S}_m(z)$ in beiden Fällen offenbar alle drei in § 15 unter I., II., III. erwähnten Eigenschaften besitzen; zugleich ist auch unmittelbar ersichtlich, dass $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{S}(z+\nu) = 0$ ist.

Es sei

$$\mathbf{r}_1(z)\mathbf{S}_\lambda(z+1) = \mathbf{r}_0(z)\mathbf{S}_\lambda(z) - \mathbf{s}_\lambda(z) \qquad {\scriptstyle (\lambda=1,2,\ldots,m)}$$

die zur Reihe $\mathbf{S}_\lambda(z)$ gehörige Differenzengleichung und Δ die Determinante der ganzen Functionen $\mathbf{s}_1(z), \ldots, \mathbf{s}_m(z)$. Im Falle $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ ist offenbar $\Delta = 0$.

Ist aber $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$, *so kann* Δ *niemals gleich Null sein, wenn die* $\mathbf{S}_\lambda(z)$ *von einander linear unabhängig sind.* Denn wäre $\Delta = 0$, so bestände

eine Identität $C_1\mathbf{s}_1(z) + \ldots + C_m\mathbf{s}_m(z) = 0$, wo die C nicht alle gleich Null wären. Dann würde aber $\mathbf{S}(z + 1) = \mathbf{r}(z)\mathbf{S}(z)$ sein, und somit

$$\mathbf{S}(z) = \frac{\mathbf{S}(z + \nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z + 1)\ldots\mathbf{r}(z + \nu - 1)},$$

wie gross auch ν sein mag. Da der Nenner der rechten Seite wegen der Voraussetzung $\lim\mathbf{r}(z) > 1$ mit wachsendem ν ohne Ende wächst, während der Zähler sich gleichzeitig der Null nähert, so müsste $\mathbf{S}(z)$ identisch gleich Null sein, und somit auch eine lineare Gleichung zwischen den Reihen $\mathbf{S}_\lambda(z)$ bestehen, was wider unsere Voraussetzung ist. Es muss also in dem fraglichen Falle wirklich Δ von Null verschieden sein. Ist aber Δ von Null verschieden, so können die Constanten C immer und nur in einer Weise so bestimmt werden, dass $C_1\mathbf{s}_1(z) + \ldots + C_m\mathbf{s}_m(z) = \mathbf{s}_0(z)$ wird, wenn $\mathbf{s}_0(z)$ eine beliebig gegebene ganze Function von höchstens $(m - 1)^{\text{ten}}$ Grade bezeichnet.

Nunmehr sei $\lim_{z=\infty}\mathbf{r}(z) = 1$ und somit $\Delta = 0$. Alsdann können die C so bestimmt werden, dass $C_1\mathbf{s}_1(z) + \ldots + C_m\mathbf{s}_m(z)$ identisch verschwindet, ohne dass alle C gleich Null sind. Der Ausdruck $\mathbf{S}(z)$ besitzt aber dann alle drei in § 7 unter I., II., III. erwähnten Eigenschaften und muss daher nach § 9 auf die Form

$$(53) \qquad C\mathbf{F}(z) = C_1\mathbf{S}_1(z) + \ldots + C_m\mathbf{S}_m(z)$$

gebracht werden können. Die Constante C kann nicht gleich Null sein, weil die $\mathbf{S}_\lambda(z)$ nach unserer Voraussetzung linear unabhängig sind. (Ein ganz specieller Fall dieser Gleichung ist die bekannte Partialbruchentwickelung des Euler'schen Integrals erster Gattung.) Da die in Gleichung (53) vorkommenden Constanten C_λ nicht alle gleich Null sind, so sei C_m von Null verschieden. Bezeichnet nun Δ' die Determinante der ganzen Functionen $\mathbf{s}_1(z), \ldots, \mathbf{s}_{m-1}(z)$, so kann Δ' nicht gleich Null sein. Denn wäre $\Delta' = 0$, so bestände eine Identität $C'_1\mathbf{s}_1(z) + \ldots + C'_{m-1}\mathbf{s}_{m-1}(z) = 0$, wo die C' nicht alle gleich Null wären. Dann hätte man nach § 9

$$(54) \qquad C'\mathbf{F}(z) = C'_1\mathbf{S}_1(z) + \ldots + C'_{m-1}\mathbf{S}_{m-1}(z),$$

und es könnte C' nicht gleich Null sein, weil die $\mathbf{S}_\lambda(z)$ linear unabhängig sind. Aus (53) und (54) würde nun zwischen $\mathbf{S}_1(z), \ldots, \mathbf{S}_m(z)$ eine ho-

mogene lineare Gleichung folgen, wo wenigstens der Coefficient von $\mathbf{S}_m(z)$ einen von Null verschiedenen Werth besässe. Es muss also wirklich Δ' von Null verschieden sein. Ist aber dies der Fall, so können die C immer und nur in einer Weise so bestimmt werden, dass

$$C_1\mathbf{s}_1(z) + \ldots + C_{m-1}\mathbf{s}_{m-1}(z) = \mathbf{s}_0(z)$$

wird, wenn $\mathbf{s}_0(z)$ eine beliebig gegebene ganze Function von höchstens $(m - 2)^{\text{ten}}$ Grade bezeichnet.

Auf Grund des oben Dargelegten kann nun der am Ende des vorigen Paragraphen bewiesene Satz durch den folgenden ergänzt werden:

Ist $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z)$ *entweder* > 1 *oder* $= 1$ *und im letzten Falle der reelle Theil von* $\varkappa < 0$, *bezeichnet ferner* $\mathbf{s}_0(z)$ *eine ganze rationale Function, deren Coefficienten als unbestimmte Grössen betrachtet werden und deren Gradzahl im ersten Falle gleich* $m - 1$, *im zweiten aber gleich* $m - 2$ *angenommen wird, so wird die Gleichung*

$$\mathbf{r}_1(z)\mathbf{S}(z + 1) = \mathbf{r}_0(z)\mathbf{S}(z) - \mathbf{s}_0(z)$$

bei passender Bestimmung von $C_1, \ldots, C_m$ *von dem Ausdrucke*

$$\mathbf{S}(z) = C_1\mathbf{S}_1(z) + C_2\mathbf{S}_2(z) + \ldots + C_m\mathbf{S}_m(z),$$

wo $\mathbf{S}_1(z), \ldots, \mathbf{S}_m(z)$ *die oben angegebene Bedeutung haben, befriedigt. Der Fall* $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) = 1$ *ist dadurch bemerkenswerth, dass* $\mathbf{s}_0(z)$ *bei passender Bestimmung von* $C_1, \ldots, C_m$ *identisch verschwinden kann, was dagegen im Falle* $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z) > 1$ *niemals möglich ist. In jenem Falle besteht daher stets, in diesem aber niemals eine homogene lineare Gleichung zwischen dem Ausdrucke* $\mathbf{F}(z)$ *und den* m *Reihen* $\mathbf{S}_1(z), \ldots, \mathbf{S}_m(z)$.

20. Die in diesem Abschnitte erhaltenen Resultate wollen wir jetzt zusammenfassen. Dabei wird der Zähler $\mathbf{s}_0(z)$ von $\mathbf{s}(z)$ als eine beliebige (unbestimmte) ganze Function von höchstens $(m - 1)^{\text{ten}}$ oder $(m - 2)^{\text{ten}}$ Grade betrachtet, je nachdem $\lim\limits_{z=\infty}\mathbf{r}(z)$ entweder > 1 oder $= 1$ ist. Im übrigen werden selbstverständlich in Bezug auf $\mathbf{r}(z)$ und $\mathbf{s}(z)$ die früheren Voraussetzungen (§ 15) festgehalten. Wenn im Folgenden von Partialbruch-

reihen die Rede ist, so kommt noch die Voraussetzung hinzu, dass unter den Null- und Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{r}(z)$ keine zwei sich finden, deren Differenz gleich einer ganzen Zahl ist. Es ist indessen nicht schwer zu finden (§ 18), dass die folgenden Resultate im wesentlichen noch bestehen bleiben, wenn diese Voraussetzung nicht gemacht wird. Die im Folgenden angewandten Bezeichnungen sind früher erklärt; insbesondere hat die Zahl p die in § 10 festgesetzte Bedeutung. Es sind zwei Hauptfälle zu beachten: je nachdem $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$ oder $= 1$ ist.

I. Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) > 1$, so sind die beiden Ausdrücke

$$F(z) = a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right]$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$
$$= a^z \mathbf{F}(z) \sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right]$$
$$+ C_1\mathbf{S}_1(z) + C_2\mathbf{S}_2(z) + \ldots + C_m\mathbf{S}_m(z)$$

stets convergent und besitzen die in § 15 unter I., II., III. erwähnten Eigenschaften; umgekehrt lässt sich auch jede Function mit den fraglichen Eigenschaften in diesen beiden Formen darstellen. (Ist $m = n$, so ist $p = 1$ zu setzen.)

II$_1$. Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und hat gleichzeitig der reelle Theil von x einen zwischen 0 und -1 liegenden Werth, so gilt von den beiden Ausdrücken

$$C\mathbf{F}(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)} = C\mathbf{F}(z) + C_1\mathbf{S}_1(z) + C_2\mathbf{S}_2(z) + \ldots$$
$$\ldots + C_m\mathbf{S}_m(z)$$

alles, was unter I. bezüglich $F(z)$ gesagt worden ist.

II$_2$. Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und der reelle Theil von $x \geq 0$, so gilt von dem Ausdrucke

$$C\mathbf{F}(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{s}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$

alles, was unter I. bezüglich $F(z)$ gesagt worden ist.

II_3. Ist $\lim\limits_{z=\infty} \mathbf{r}(z) = 1$ und der reelle Theil von $\varkappa \leqq -1$; so gilt von dem Ausdrucke

$$C\mathbf{F}(z) + C_1\mathbf{S}_1(z) + C_2\mathbf{S}_2(z) + \ldots + C_m\mathbf{S}_m(z)$$

alles, was unter I. bezüglich $F(z)$ gesagt worden ist.

Die Anzahl der unbestimmten Constanten, welche in dem unter II_3 (und II_1) auftretenden Ausdrucke vorkommen, ist nur dem Scheine nach gleich $m + 1$, in der That aber gleich m. Dies ergiebt sich daraus, dass die $m + 1$ Functionen $\mathbf{F}(z), \mathbf{S}_1(z), \ldots, \mathbf{S}_m(z)$ nicht von einander linear unabhängig sind.

IV.

Über die Beziehung zwischen den Gammafunctionen und den Integralen der Differentialgleichung

$$(a_0 - b_0 x)y + (a_1 - b_1 x)x\frac{dy}{dx} + \ldots + (a_m - b_m x)x^m\frac{d^m y}{dx^m} = 0.$$

21. In einer früheren Arbeit[1] habe ich den innigen Zusammenhang dargestellt, welche zwischen den Gammafunctionen und den Integralen der obigen Differentialgleichung stattfindet. Ein ganz specieller Fall dieser Differentialgleichung ist die der hypergeometrischen Reihe. In der grundlegenden Gauss'schen Abhandlung über die genannte Reihe wird die Function $\Pi(z) = \Gamma(z + 1)$ aufgestellt und ihre wichtigsten Eigenschaften ermittelt. Der Werth der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $x = 1$ wird sodann mit Leichtigkeit auf diese Function zurückgeführt. In ganz ähnlicher Weise kann nun die Π-Function auch in der Theorie der obigen allgemeineren Differentialgleichung benutzt werden. Die Anwendbarkeit der Function in dieser Hinsicht soll jedoch nicht in der vorliegenden Arbeit verfolgt werden. Anstatt dessen wollen wir vervollständigen, was in einer früheren Arbeit[1] über den Zusammenhang zwischen der Gammafunction und

[1] *Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen.* Bd. 9 dieses Journals.

der obigen Differentialgleichung dargestellt worden ist. Dieser Zusammenhang kann folgenderweise angegeben werden. Bezeichnet y eine in passender Weise gewählte Lösung unserer Differentialgleichung, und wird das Integral

$$\int y x^{z-1}\, dx$$

zwischen zwei singulären Stellen der Differentialgleichung genommen, so kann dieses Integral, wenn es überhaupt einen bestimmten Sinn hat, durch die Gammafunction ausgedrückt werden. *Ist insbesondere* $b_m = 0$ (und a_m reel), *in welchem Falle nur zwei singuläre Stellen* $x = 0$ *und* $x = \infty$ *sich finden, so hat das Integral*

$$\int_0^\infty y x^{z-1}\, dx$$

bei passender Wahl von y *stets einen bestimmten Sinn, wenn zugleich der reelle Theil von* z *hinreichend gross ist, und kann durch die Gammafunction in folgender Weise ausgedrückt werden*

$$\int_0^\infty y x^{z-1}\, dx$$

$$= a^z \mathbf{F}(z) \sin \pi(z - c_1) \ldots \sin \pi(z - c_p) \left[\frac{A_1}{\sin \pi(z - c_1)} + \ldots + \frac{A_p}{\sin \pi(z - c_p)} \right],$$

wo $\mathbf{F}(z)$ *und* p *ihre früher festgesetzten Bedeutungen haben.* Dies ist a. a. O. nicht bewiesen. Es giebt im Allgemeinen p von einander linear unabhängige Integrale y, für welche eine solche Gleichung besteht, und für welche somit $\lim_{x=\infty} x^k y = 0$ ist, wie gross auch k sein mag.

Da die Differentialgleichung der Exponentialfunction e^{-x} ein specieller und zugleich der überhaupt einfachste Fall unserer Differentialgleichung ist, so behaupten wir also mit andern Worten, dass die im Frage stehenden bestimmten Integrale durch das einfachste unter ihnen

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx$$

ausgedrückt werden können.

In diesem Paragraphen sollen zunächst einige Formeln entwickelt und Bezeichnungen festgesetzt werden.

Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, dass a_m einen von Null verschiedenen Werth hat. Dagegen kann b_m auch gleich Null sein. Unter b_n soll weiterhin die erste von den Grössen $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ verstanden werden, welche von Null verschieden ist. Ist $n = m$, so hat unsere Differentialgleichung drei singuläre Stellen: $x = 0$, $x = \frac{a_m}{b_m} = a$ und $x = \infty$. Ist $n < m$, so hat sie deren nur zwei: $x = 0$ und $x = \infty$.

Weil a_m von Null verschieden ist, so besitzen die Integrale unserer Differentialgleichung bekanntlich die Eigenschaft, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von x, in der Umgebung von $x = 0$ endlich zu bleiben, und können in dieser Umgebung durch eine Summe von Reihen der Form

$$(55) \qquad y_\rho = x^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} [C_0^{(\nu)} + C_1^{(\nu)} \log x + \ldots + C_{k-1}^{(\nu)} (\log x)^{k-1}] x^\nu$$

dargestellt werden, wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung der Differentialgleichung bedeutet. Ist $n = m$, so ist der Convergenzradius R der Reihen y_ρ gleich $\left|\frac{a_m}{b_m}\right|$. Ist $n < m$, so ist $R = \infty$, d. h. die y_ρ sind beständig convergirende Reihen.

Durch die Substitution $x = t^{-1}$ geht die Differentialgleichung

$$(56) \qquad (a_0 - b_0 x) y + (a_1 - b_1 x) x \frac{dy}{dx} + \ldots + (a_m - b_m x) x^m \frac{d^m y}{dx^m} = 0$$

in eine Differentialgleichung derselben Form über:

$$(57) \qquad (A_0 - B_0 t) y + (A_1 - B_1 t) t \frac{dy}{dt} + \ldots + (A_m - B_m t) t^m \frac{d^m y}{dt^m} = 0.$$

Die Constanten A und B lassen sich mit Hülfe der folgenden in Bezug auf ρ identischen Gleichungen berechnen:

$$(58) \qquad \begin{aligned} \mathbf{r}_0(-\rho) &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho(\rho - 1) + \ldots + a_m\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 1) \\ &= B_0 - B_1\rho + B_2\rho(\rho + 1) + \ldots + (-1)^m B_m \rho(\rho + 1)\ldots \\ &\qquad \ldots(\rho + m - 1), \end{aligned}$$

$$(59) \qquad \begin{aligned} \mathbf{r}_1(-\rho - 1) &= b_0 + b_1\rho + b_2\rho(\rho - 1) + \ldots + b_m\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 1) \\ &= A_0 - A_1\rho + A_2\rho(\rho - 1) + \ldots + (-1)^m A_m \rho(\rho + 1)\ldots \\ &\qquad \ldots(\rho + m - 1). \end{aligned}$$

Es sind somit b_m und A_m beide gleichzeitig Null oder von Null verschieden. Ist also b_m von Null verschieden, so sind $x = 0$ und $x = \infty$ singuläre Stellen derselben Beschaffenheit. Die Integrale der Differentialgleichung (56) lassen sich dann in der Umgebung der Stelle $x = \infty$ durch eine Summe von Reihen der folgenden Form ausdrücken

$$y_\rho = \left(\frac{1}{x}\right)^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[C_0^{(\nu)} + C_1^{(\nu)} \log \frac{1}{x} + \ldots + C_{k-1}^{(\nu)} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{k-1} \right] \left(\frac{1}{x}\right)^\nu,$$

wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = \infty$ gehörigen Fundamentalgleichung bedeutet. Diese Reihen convergiren, wenn $|x| > R$ ist. Es ist offenbar $\mathbf{r}_0(-\rho) = 0$ die zum singulären Punkte $x = 0$ und $\mathbf{r}_1(\rho - 1) = 0$ die zum Punkte $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung.

Ist aber b_m und somit auch $A_m = 0$, so ist die Beschaffenheit der Stelle $x = \infty$ eine ganz andere als vorher. In § 24 soll sie in einer gewissen Beziehung charakterisirt werden. Dabei wird die Gammafunction eine eigenthümliche Anwendung finden.

Durch die Substitution $x = \alpha t$ werden die Constanten a der Differentialgleichung (56) nicht verändert; die b gehen aber in $b_0\alpha, b_1\alpha, \ldots, b_m\alpha$ über. Deshalb können wir weiterhin voraussetzen, dass $\frac{a_m}{b_n} = (-1)^{m-n} a$ ist, wo a eine reelle positive Zahl bedeutet. Ferner nehmen wir an, dass die bestimmten Integrale, von denen die Rede sein wird, längs einer die Grenzen verbindenden Geraden erstreckt sind. Bei den ferneren Integrationen ist demnach x eine reelle Veränderliche.

Stellt man die durch partielle Integration erhaltene Gleichung

$$\int_0^x x^{z+\nu} y^{(\nu)} dx = x^{z+\nu} y^{(\nu-1)} - (z+\nu) x^{z+\nu-1} y^{(\nu-2)}$$

$$+ (z+\nu-1)(z+\nu) x^{z+\nu-2} y^{(\nu-3)} + \ldots + (-1)^{\nu-1}(z+2)(z+3)\ldots(z+\nu) x^{z+1} y$$

$$+ (-1)^\nu (z+1)(z+2)\ldots(z+\nu) \int_0^x x^z y dx$$

mit der Gleichung

$$\int_0^x x^z (b_0 y + b_1 x y' + \ldots + b_n x^n y^{(n)}) dx = \int_0^x x^{z-1} (a_0 y + a_1 x y' + \ldots + a_m x^m y^{(m)}) dx$$

zusammen, so ergiebt sich

$$(60)\qquad \mathbf{r}_1(z)\int_0^x yx^z dx = \mathbf{r}_0(z)\int_0^x yx^{z-1}dx - x^{z-1}\mathbf{s}_0(z, x),$$

wo $\mathbf{r}_0(z)$, $\mathbf{r}_1(z)$, $\mathbf{s}_0(z, x)$ die folgenden Ausdrücke bezeichnen

$$(61)\qquad \mathbf{r}_0(z) = a_0 - a_1 z + a_2 z(z+1) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m a_m z(z+1)\ldots(z+m-1),$$

$$(62)\qquad \mathbf{r}_1(z) = b_0 - b_1(z+1) + b_2(z+1)(z+2) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n b_n(z+1)(z+2)\ldots(z+n),$$

$$(63)\qquad \mathbf{s}_0(z, x) = \varphi_0 + \varphi_1 z + \ldots + \varphi_{m-1}z^{m-1}.$$

Die Grössen φ sind in Bezug auf $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ homogene lineare Functionen, deren Coefficienten aber ganze rationale Functionen von x sind. Insbesondere hat φ_{m-1} die Form

$$(64)\qquad \varphi_{m-1} = (-1)^m(a_m - b_m x)xy.$$

Unter den Grössen $\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ ist φ_0 die einzige, welche die $(m-1)^{te}$ Ableitung von y enthält, und zwar ist der Coefficient von $y^{(m-1)}$ gleich

$$(65)\qquad -x^m(a_m - b_m x).$$

Es ist, wie schon gesagt wurde,

$$\mathbf{r}_0(-z) = a_0 + a_1 z + a_2 z(z-1) + \ldots + a_m z(z-1)\ldots(z-m+1) = 0$$

die zum singulären Punkte $x = 0$ und, wenn $n = m$ ist,

$$\mathbf{r}_1(z-1) = b_0 - b_1 z + b_2 z(z+1) + \ldots + (-1)^n b_n z(z+1)\ldots(z+n-1) = 0$$

die zum singulären Punkte $x = \infty$ gehörige Fundamentalgleichung. Setzt man

$$\mathbf{r}_0(z) = (-1)^m a_m(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m),$$
$$\mathbf{r}_1(z) = (-1)^n b_n(z-z_1')(z-z_2')\ldots(z-z_n'),$$

so sind die Wurzeln der erst genannten Fundamentalgleichung: $-z_1$,

$-z_2, \ldots, -z_m$, und die der letzteren $z'_1+1, z'_2+1, \ldots, z'_n+1$. Auch weiterhin sollen die folgenden Bezeichnungen beibehalten werden:

$$\mathbf{r}(z) = \frac{\mathfrak{r}_0(z)}{\mathfrak{r}_1(z)} = a\frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m)}{(z-z'_1)(z-z'_2)\ldots(z-z'_n)}, \qquad \left(a = (-1)^{m-n}\frac{a_m}{b_n}\right),$$

$$\varkappa = z'_1 + \ldots + z'_n - z_1 - \ldots - z_m = \frac{b_{n-1}}{b_n} - \frac{a_{m-1}}{a_m} + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ist $n = m$, so ist offenbar

$$(66) \qquad \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+2)(\rho+\varkappa+1) = 0$$

die zum singulären Punkte $x = a$ gehörige Fundamentalgleichung.

Aus der allgemeinen Form (55) der Integrale unserer Differentialgleichung in der Umgebung der Stelle $x = 0$ geht hervor, dass der reelle Theil von $z = \zeta + i\zeta'$ im Allgemeinen grösser als die entsprechenden Theile von $z_1, \ldots, z_m$ vorausgesetzt werden muss, wenn die in Gleichung (60) vorkommenden Integrale einen bestimmten Sinn haben sollen. Es soll weiterhin mit ζ_1 die im algebraischen Sinne grösste unter den reellen Theilen von $z_1, \ldots, z_m$ und mit ζ'_1 die kleinste unter den reellen Theilen von $z'_1, \ldots, z'_n$ zu findende Zahl bezeichnet werden.

Es giebt überhaupt nur zwei Fälle, wo der in Gleichung (60) vorkommende Ausdruck $x^{z-1}\mathbf{s}_0(z, x)$ in Bezug auf die Grösse z rational werden kann. Entweder muss $x = 1$ gesetzt werden, oder es muss x einen solchen Werthe erhalten, dass $\mathbf{s}_0(z, x)$ identisch verschwindet.

22. In diesem Paragraphen setzen wir voraus, es sei $n = m$. Die zum singulären Punkte $x = a$ der Differentialgleichung (56) gehörige Fundamentalgleichung (66) hat die Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, m-2, -\varkappa-1$. Das zur Wurzel $\rho = -\varkappa - 1$ gehörige Integral, welches mit η bezeichnet werden soll, ist nun besonders bemerkenswerth. Soll das Integral

$$(67) \qquad f(z) = \int_0^a \eta x^{z-1} dx,$$

wo $\zeta > \zeta_1$ ist, einen bestimmten Sinn haben, so ist es offenbar nothwendig und zugleich auch hinreichend, dass der reelle Theil von $\varkappa < 0$ ist. Überdies wollen wir aber in diesem Paragraphen noch voraussetzen, dass

$-\varkappa - 1$ von den übrigen Wurzeln der Gleichung (66) verschieden ist, d. h. dass $\varkappa$ gleich keiner der Zahlen $-1, -2, \ldots, -m+1$ ist. Dann ist

$$\eta = (a-x)^{-\varkappa-1}\mathfrak{P}(a-x),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $a-x$ fortschreitende Reihe bezeichnet, deren constantes Glied von Null verschieden ist.

Aus Gleichung (60), wo $y = \eta$ zu setzen ist, geht hervor, dass $\lim\limits_{x=a} \mathbf{s}_0(z, x)$ endlich sein muss. Es soll bewiesen werden, dass diese Grenze identisch gleich Null ist. Zu dem Ende beachte man, was schon im vorigen Paragraphen hervorgehoben wurde, dass $\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ in Bezug auf $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(m-1)}$ als homogene lineare Functionen betrachtet werden können, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind, sowie auch, dass die $(m-1)^{\text{te}}$ Ableitung $\eta^{(m-1)}$ nur in φ_0 enthalten wird. Weil ferner $\eta^{(\lambda)} = (a-x)^{-\varkappa-\lambda-1}\mathfrak{P}_\lambda(a-x)$ gesetzt werden kann, wo $\mathfrak{P}_\lambda$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet, so kann $\mathbf{s}_0(z, x)$ auf die folgende Form gebracht werden

$$(68) \qquad \mathbf{s}_0(z, x) = (a-x)^{-\varkappa-m}(\Phi_0 + \Phi_1 z + \ldots + \Phi_{m-1}z^{m-1}),$$

wo $\Phi_0, \ldots, \Phi_{m-1}$ nach positiven ganzzahligen Potenzen von $a-x$ entwickelbare Functionen bezeichnen. Ist nun der reelle Theil von $\varkappa < -m$, so geht die Richtigkeit unserer Behauptung aus (68) unmittelbar hervor. Ist der reelle Theil von $\varkappa = -m$, so werden $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(m-2)}$, nicht aber $\eta^{(m-1)}$, gleich Null für $x = a$. Dasselbe ist daher auch mit den Functionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ der Fall, da sie nur $\eta, \ldots, \eta^{(m-2)}$, nicht aber $\eta^{(m-1)}$ enthalten. Es muss indessen auch φ_0 für $x = a$ verschwinden, was sich daraus ergiebt, dass $\eta^{(m-1)}$ mit dem Coefficienten (65) multiplicirt ist, und dieser Coefficient ist Null für $x = a$, während $\eta^{(m-1)}$ nicht unendlich ist. Aus Gleichung (63) geht nun die Richtigkeit unserer Behauptung auch in dem fraglichen Falle hervor.

Nunmehr sei $\varkappa$ eine Grösse, deren reeller Theil einen zwischen 0 und $-m$ liegenden Werth hat, und es sei der imaginäre Theil von $\varkappa$ jedesmal von Null verschieden, wenn der reelle Theil gleich irgend einer der Zahlen $-1, -2, \ldots, -m+1$ ist. Nähert sich nun x der Stelle a, so nähert sich $\mathbf{s}_0(z, x)$ wegen (60) gleichzeitig einer bestimmten endlichen Grenze, während jedoch $(a-x)^{-\lambda-m}$ ohne Ende wächst. Es muss somit

der in (68) vorkommende Klammerausdruck für $x = a$ gleich Null sein. Weil dies für unbestimmte Werthe von z stattfindet, so müssen $\Phi_0, \ldots, \Phi_{m-1}$ den gemeinschaftlichen Factor $a - x$ enthalten, und es kann demnach $\mathbf{s}_0(z, x)$ auf die folgende Form gebracht werden

$$(69) \qquad \mathbf{s}_0(z, x) = (a - x)^{-\varkappa-m+1}(\Phi'_0 + \Phi'_1 z + \ldots + \Phi'_{m-1} z^{m-1}),$$

wo die Φ' nach positiven ganzzahligen Potenzen von $a - x$ entwickelbare Functionen bezeichnen. Ist nun der reelle Theil von $\varkappa < -m + 1$, so ist offenbar $\mathbf{s}_0(z, a)$ identisch gleich Null. Hat der reelle Theil von $\varkappa$ den Werth $-m + 1$, so ist der absolute Betrag des Ausdruckes $(a - x)^{-\varkappa-m-1}$ zwar gleich Eins, der Ausdruck selbst aber nähert sich, weil der imaginäre Theil von $\varkappa$ nicht gleich Null ist, keiner bestimmten Grenze, wenn x sich der Stelle a nähert. Es muss also wiederum der in (69) vorkommende Klammerausdruck für $x = a$ und für unbestimmte Werthe von z gleich Null sein, etc. Durch wiederholte Anwendung dieser Schlussfolgerungen ergiebt sich offenbar, das $\mathbf{s}_0(z, a)$ in allen den Fällen identisch verschwindet, wo der reelle Theil von $\varkappa < 0$ ist, während $\varkappa$ selbst einen von den ganzen Zahlen $-1, -2, \ldots, -m + 1$ verschiedenen Werth hat.

Ist $\varkappa$ gleich irgend einer der genannten Zahlen, so ist $\rho = -\varkappa - 1$ eine zweifache Wurzel der Gleichung (66), und dann hat es keinen Sinn, von einem einzigen zu dieser Wurzel gehörigen Integrale zu sprechen. Bei dieser Gelegenheit wollen wir diesen Fall keiner näheren Erörterung unterziehen.

Es sei also fortwährend der reelle Theil von $\varkappa < 0$ und $\varkappa$ selbst von den ganzen Zahlen $-1, -2, \ldots, -m + 1$ verschieden. Die durch (67) definirte Function $f(z)$ hat alsdann für $\zeta > \zeta_1$ einen bestimmten Sinn, und es ist

$$f(z + 1) = \mathbf{r}(z) f(z).$$

Da die Veränderliche x reel ist, so kann der absolute Betrag von $f(z)$, wofern die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$ auf einen, der Bedingung $\alpha > \zeta_1$ genügenden, zur imaginären Axe parallelen Streifen ($\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1$) beschränkt wird, nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Weil $f(z)$ nach einem bekannten Satze aus der Theorie der bestimmten Integrale in dem genannten Gebiete zugleich eine monogene Function von z

ist, so kann sie auf Grund des in § 9 bewiesenen Satzes auf die folgende Form gebracht werden:

$$(70)\qquad \int_0^a \eta x^{z-1}dx = Ca^z \frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z_1')\ldots\Gamma(z-z_m')} = Ca^z\mathbf{F}(z).$$

Durch diese Gleichung wird eine grosse Menge bestimmter Integrale auf die Gammafunction zurückgeführt. Ein ganz specieller Fall derselben ist die bekannte Gleichung

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1}x^{z-1}dx = \frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}. \qquad {\scriptstyle (a>0)}$$

Ist a von Eins verschieden, so kann $f(z)$ folgenderweise als Summe zweier Integrale dargestellt werden

$$f(z) = \int_0^a \eta x^{z-1}dx = \int_0^1 \eta x^{z-1}dx + \int_1^a \eta x^{z-1}dx = P(z) + Q(z).$$

Setzt man in Gleichung (60) $y = \eta$ und $x = 1$, so ergiebt sich, dass $P(z)$ die Differenzengleichung $\mathbf{r}_1(z)P(z+1) = \mathbf{r}_0(z)P(z) - \mathbf{s}_0(z)$ befriedigt, wo $\mathbf{s}_0(z) = \mathbf{s}_0(z, 1)$ wegen (63) eine ganze rationale Function von höchstens $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade bezeichnet. Hieraus folgt, dass $Q(z) = f(z) - P(z)$ der Gleichung $\mathbf{r}_1(z)Q(z+1) = \mathbf{r}_0(z)Q(z) + \mathbf{s}_0(z)$ genügen muss. Das Integral $Q(z)$ hat aber für jeden Werth von z einen bestimmten endlichen Werth und kann daher nach einem bekannten Satze in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelt werden. Der obigen Darstellung von $f(z)$ als Summe zweier Integrale entspricht die Mittag-Leffler'sche Darstellung derselben Function als Summe einer Partialbruchentwickelung und einer beständig convergirenden Potenzreihe.

23. In diesem und im folgenden Paragraphen nehmen wir an, dass $n < m$ ist. Unsere Differentialgleichung (56) hat dann nur zwei singuläre Stellen $x = 0$ und $x = \infty$, von denen die letztere als eine wesentlich singuläre zu betrachten ist, weil die Integrale der Differentialgleichung die Eigenschaft nicht mehr besitzen, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von x in der Umgebung dieser Stelle endlich zu bleiben.

Es kann demnach in Frage gestellt werden, ob es überhaupt ein Integral y gebe, für welches das Integral

$$\int_0^1 y x^{z-1} dx \qquad (\zeta > \zeta_1)$$

einen bestimmten Sinn hat. Die Existenz solcher Integrale lässt sich indessen leicht nachweisen, wenn wir einen von Herrn Pincherle in seiner interessanten Arbeit *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate*[1] bewiesenen Satz zum Ausgangspunkte wählen und den demselben zu Grunde liegenden Gedankengang verfolgen.

Mit Benutzung unserer im Vorhergehenden festgesetzten Bezeichnungen kann der in Frage stehende Satz folgenderweise ausgesprochen werden:

Setzt man

$$\Phi(z) = a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z_1')\ldots\Gamma(z-z_n')},$$

ist ferner $n < m$ und α eine beliebige reelle Zahl, welche grösser ist als die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$, so hat das Integral

$$(71) \qquad \varphi(x) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-z}\Phi(z)dz,$$

wenn der reelle Theil von x positiv ist und wenn der Integrationsweg aus der zur imaginären Axe parallelen Geraden $\zeta = \alpha$ besteht, stets einen bestimmten endlichen, von α unabhängigen Werth, und es ist zugleich $\varphi(x)$ ein Integral der Differentialgleichung (56).

Dieser Satz gilt aber auch für den Fall, wo $\Phi(z)$ gleich dem in § 10 *charakterisirten allgemeineren Ausdruck* (34):

$$(72) \quad \Phi(z) = a^z \mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)} + \ldots + \frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right]$$

gesetzt wird, was jetzt nachgewiesen werden soll. Der Beweis stimmt, abgesehen von einigen unwesentlichen Modificationen, mit dem des Herrn Pincherle vollständig überein.

[1] Rendiconti della R. Accad. dei Lincei. Vol. 4. S. 694 u. ff.

Nach einem in § 11 bewiesenen Satze hat das Integral (71), wo $\Phi(z)$ nunmehr den Ausdruck (72) bezeichnet, stets einen bestimmten Sinn, wenn $\alpha > \zeta_1$, d. h. grösser als die reellen Theile von $z_1, \ldots, z_m$, und der reelle Theil von $x > 0$ ist. Es soll zunächst bewiesen werden, dass der Werth des Integrals von α unabhängig ist.

Zu dem Ende denke man sich in der durch die Bedingung $\zeta > \zeta_1$ definirten Hälfte der z-Ebene ein Rechteck mit den Ecken $\alpha - i\omega$, $\alpha + i\omega$, $\beta + i\omega$, $\beta - i\omega$. Wird das Integral

$$\int x^{-z}\Phi(z)dz$$

längs der Begrenzung dieses Rechteckes erstreckt, so ist der Werth desselben nach einem bekannten Satze gleich Null. Somit ist

$$\int_{\alpha - i\omega}^{\alpha + i\omega} x^{-z}\Phi(z)dz + \int_{\alpha + i\omega}^{\beta + i\omega} x^{-z}\Phi(z)dz$$

$$+ \int_{\beta + i\omega}^{\beta - i\omega} x^{-z}\Phi(z)dz + \int_{\beta - i\omega}^{\alpha - i\omega} x^{-z}\Phi(z)dz = 0.$$

Auf Grund des in § 11 bewiesenen Satzes wissen wir aber, dass der Ausdruck $z^k x^{-z}\Phi(z)$, wie gross auch k sein mag, mit wachsendem $|\zeta'|$ sich gleichmässig der Grenze Null nähert, wenn der reelle Theil von $z = \zeta + i\zeta'$ auf ein endliches Intervall, und die Veränderliche x auf ein Gebiet, dessen sämmtliche Punkte positive Abscissen haben, beschränkt wird. Lässt man also ω ohne Ende wachsen, so nähern sich das zweite und vierte in der obigen Gleichung vorkommende Integral der Grenze Null. Für $\omega = \infty$ geht diese Gleichung somit in die folgende über

$$\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} x^{-z}\Phi(z)dz = \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} x^{-z}\Phi(z)dz.$$

Jetzt gehen wir zum Beweise des zweiten Theiles des fraglichen Satzes über. Auf Grund der letzten Gleichung ist offenbar

$$(73) \qquad \varphi(x) = \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} x^{-z}\Phi(z)dz = \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} x^{-(z+1)}\Phi(z + 1)dz.$$

Hieraus folgt

$$\varphi'(x) = -\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-(z+1)}\Phi(z)z\,dz = -\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-(z+2)}\Phi(z+1)(z+1)dz,$$

. . . .

$$\varphi^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} z^{-(z+\nu)}\Phi(z)z(z+1)\ldots(z+\nu-1)dz$$

$$= (-1)^\nu \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-(z+\nu+1)}\Phi(z+1)(z+1)\ldots(z+\nu)dz.$$

Es ist also allgemein

$$(74)\qquad (-1)^\nu x^\nu \varphi^{(\nu)}(x) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z}\Phi(z)z(z+1)\ldots(z+\nu-1)dz$$

und

$$(75)\quad (-1)^\nu x^{\nu+1}\varphi^{(\nu)}(x) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z}\Phi(z+1)(z+1)(z+2)\ldots(z+\nu)dz.$$

Setzt man

$$\mathbf{r}_0(z) = a_0 - a_1 z + a_2 z(z+1) + \ldots + (-1)^m a_m z(z+1)\ldots(z+m-1)$$

$$\mathbf{r}_1(z) = b_0 - b_1(z+1) + b_2(z+1)(z+2) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n b_n(z+1)(z+2)\ldots(z+n)$$

so kann die Gleichung $\mathbf{r}_1(z)\Phi(z+1) = \mathbf{r}_0(z)\Phi(z)$ nach Multiplication mit x^{-z}, in folgender Weise geschrieben werden:

$$b_0 x^{-z}\Phi(z+1) - b_1 x^{-z}\Phi(z+1)(z+1) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n b_n x^{-z}\Phi(z+1)(z+1)\ldots(z+n) = a_0 x^{-z}\Phi(z) - a_1 x^{-z}\Phi(z)z + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m a_m x^{-z}\Phi(z)z(z+1)\ldots(z+m-1).$$

Integrirt man nun die beiden Seiten dieser Gleichung zwischen den Grenzen $a - i\infty$ und $a + i\infty$, so ergiebt sich mit Benutzung von (74) und (75)

$$b_0 x\varphi(x) + b_1 x^2\varphi'(x) + \ldots + b_n x^{n+1}\varphi^{(n)}(x)$$
$$= a_0\varphi(x) + a_1 x\varphi'(x) + \ldots + a_m x^m \varphi^{(m)}(x)$$

Es ist also $\varphi(x)$ ein Integral der Differentialgleichung (56).

24. Es ist nun sehr leicht zu zeigen, dass das Integral $\varphi(x)$, für unbestimmte Werthe der Constanten $A_1, \ldots, A_p$, mit der Exponentialfunction e^{-x} die Eigenschaft gemein hat, dass $x^k\varphi(x)$, wie gross auch k sein mag, für positive ohne Ende wachsende Werthe des reellen Theils von x sich der Grenze Null nähert. Damit ist zugleich bewiesen, dass das Integral

$$\int_0^\infty \varphi(x)x^{z-1}dx$$

für $\zeta > \zeta_1$ stets einen bestimmten Sinn hat. Aus der Gleichung (73) folgt in der That

$$\varphi(x) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-(z+k)}\Phi(z+k)dz$$

oder

$$x^k\varphi(x) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-z}\Phi(z+k)dz,$$

woraus sich die Richtigkeit unserer Behauptung sehr leicht ergiebt.

Es bleibt noch übrig, zu beweisen, dass das Integral $\varphi(x)$ nicht identisch verschwinden kann, was nicht unmittelbar einleuchtend ist. Nach dem in § 11 bewiesenen Satze hat das Integral $\varphi(x)$ immer einen bestimmten Sinn, wenn der Integrationsweg durch keine Unendlichkeitsstelle von $\Phi(z)$ hindurchgeht. Da die Unendlichkeitsstellen dieser Function in eine gewisse Anzahl aritmetischer Reihen zerfallen, so kann offenbar die Zahl α so angenommen werden, dass $\alpha - \lambda$, für jeden ganzzahligen Werth von λ, von den reellen Theilen der genannten Stellen verschieden ist. Das Integral

$$\psi_\lambda(x) = \int_{\alpha-\lambda-i\infty}^{\alpha-\lambda+i\infty} x^{-z}\Phi(z)dz \qquad (\alpha > \zeta_1)$$

hat dann für jeden ganzzahligen Werth von λ einen bestimmten Sinn. Durch Vermittelung eines Rechteckes und mit Benutzung der im vorigen Paragraphen angewandten Betrachtungen findet man, dass das Integral $\varphi(x)$ gleich ist dem Integrale $\psi_\lambda(x)$, vermehrt um die mit $2\pi i$ multiplicirte Summe der Residuen der zwischen den Parallelen $\zeta = \alpha - \lambda$ und $\zeta = \alpha$ liegenden Unendlichkeitsstellen von $x^{-z}\Phi(z)$. Es sei ρ gleich einer der Zahlen $-z_1, -z_2, \ldots, -z_m$. Dann hat man

$$x^{-z} = x^{\rho+\nu}\left(1 - \frac{z+\rho+\nu}{1}\log x + \frac{(z+\rho+\nu)^2}{1 \cdot 2}(\log x)^2 + \ldots\right),$$

(76) $$\Phi(z) = \frac{C_{\mu-1}^{(\nu)}}{(z+\rho+\nu)^{\mu}} + \ldots + \frac{C_0^{(\nu)}}{z+\rho+\nu} + \mathfrak{P}(z+\rho+\nu),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet. Das Residuum der Stelle $z = -\rho - \nu$ ist somit

$$\left[C_0 - C_1 \log x + \ldots + (-1)^{\mu-1} C_{\mu-1} \frac{(\log x)^{\mu-1}}{1 \cdot 2 \ldots (\mu-1)}\right] x^{\rho+\nu}.$$

Es ist also

$$\varphi(x) = \phi_\lambda(x) + 2\pi i \sum_{\rho} x^{\rho} \sum_{\nu} \left[C_0^{(\nu)} - C_1^{(\nu)} \log x + \ldots + (-1)^{\mu-1} C_{\mu-1}^{(\nu)} \frac{(\log x)^{\mu-1}}{1 \cdot 2 \ldots (\mu-1)}\right] x^{\nu}$$

wo die Summation sich auf solche Werthe ρ, ν bezieht, für welche $-\rho - \nu$ gleich einer zwischen den Parallelen $\zeta = \alpha - \lambda$ und $\zeta = \alpha$ liegende Unendlichkeitsstelle von $\Phi(z)$ ist. Für wachsende Werthe von λ nähert sich offenbar

$$\phi_\lambda(x) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z} \frac{x^\lambda \Phi(z)\, dz}{\Gamma(z-1)\Gamma(z-2)\ldots\Gamma(z-\lambda)},$$

da $n < m$ ist, der Grenze Null. Es ist also

(77) $$\varphi(x) = 2\pi i \sum_{\rho} x^{\rho} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[C_0^{(\nu)} - C_1^{(\nu)} \log x + \ldots + (-1)^{\mu-1} C_{\mu-1}^{(\nu)} \frac{(\log x)^{\mu-1}}{1 \cdot 2 \ldots (\mu-1)}\right] x^{\nu}.$$

Dann ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen, denn $C_0^{(\nu)}, C_1^{(\nu)}, \ldots, C_{\mu-1}^{(\nu)}$ können nicht alle gleich Null sein. Wir haben aber zugleich die Function $\varphi(x)$ in eine beständig convergirende Reihe der bekannten Form (55) entwickelt. Die Constanten C werden aus der Gleichung (76) erhalten.

Aus (74) geht hervor, dass auch alle Ableitungen von $\varphi(x)$ sich der Grenze Null nähern, wenn der reelle Theil von x durch positive Werthe ohne Ende wächst. Setzt man also in (60) $y = \varphi(x)$ und $x = \infty$, so ergiebt sich mit Benutzung der Bezeichnung

(78) $$F(z) = \int_0^\infty \varphi(x) x^{z-1} dx$$

die Gleichung

$$F(z+1)=\frac{\mathbf{r}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)}F(z)=\mathbf{r}(z)F(z)$$

Weil x bei der Integration als eine reelle Veränderliche betrachtet wird, so findet man, dass das Integral (78) nicht nur die in § 10 unter I. und II. sondern auch die unter III. erwähnte Eigenschaft besitzt. Bei passender Bestimmung von $A_1, \ldots, A_p$ lässt sich somit $F(z)$ auf die folgende Form bringen

$$\int_0^\infty \varphi(x)x^{z-1}dy \tag{79}$$

$$= a^z\mathbf{F}(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\ldots+\frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right].$$

Es bleibt noch übrig, den folgenden Satz zu beweisen:

Es giebt p und nicht mehr als p von einander linear unabhängige Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_p$ der Differentialgleichung (56), *welche die Eigenschaft* $\lim\limits_{x=+\infty} x^k\varphi(x)=0$ *besitzen, wie gross auch k sein mag.*

Der erste Theil ist auf Grund des soeben bewiesenen Satzes unmittelbar einleuchtend. Es sei, um den zweiten Theil zu beweisen, y ein Integral, welches die genannte Eigenschaft ebenfalls besitzt. Von $y_1, \ldots, y_p$ nehmen wir zugleich an, dass sie solche Integrale sind, die sich auf die Form (71) bringen lassen. Es ergiebt sich nun zunächst, dass die Ableitungen von y ebenfalls die Eigenschaft besitzen, dass sie nach Multiplication mit einer beliebigen Potenz von x sich der Grenze Null nähern, wenn der reelle Theil von x durch positive Werthe ohne Ende wächst. Bezeichnet nämlich $M(\xi, r)$ die obere Grenze von y in dem Falle, dass x eine um den Punkt $x=\xi$ mit dem Radius r gezeichnete Kreislinie durchläuft, so ist bekanntlich

$$|y^{(\nu)}(x)| < \frac{|\nu}{r^\nu}M(\xi, r).$$

Lässt man nun r Constant bleiben und den reellen Theil von ξ durch positive Werthe ohne Ende wachsen, so nähert sich M, mit einer beliebigen Potenz von ξ multiplicirt, offenbar der Grenze Null. Dies ist somit auch mit den Ableitungen von y der Fall.

Aus der Gleichung (63) ergiebt sich nun, weil $\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ homogene lineare Functionen von $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ sind, dass $\lim\limits_{x=+\infty} x^{z-1}\mathbf{s}_0(z, x)$ für alle Werthe von z gleich Null ist. Aus (60) folgt somit

$$\int\limits_0^x y x^z dx = \mathbf{r}(z)\int\limits_0^x y x^{z-1} dx.$$

Beschränkt man die Veränderliche z auf einen beliebigen, der Bedingung $\alpha > \zeta_1$ genügenden, zur imaginären Axe parallelen Streifen ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$), so kann der absolute Betrag dieses Integrals, weil x reel und positiv ist, nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Auf Grund des in § 10 bewiesenen Satzes muss sich also das Integral auf die folgende Form bringen lassen

$$\int\limits_0^x y x^{z-1} dx = \Phi(z),$$

wo $\Phi(z)$ den Ausdruck (72) bezeichnet. Dies ist auch mit jedem der Integrale

$$\int\limits_0^x y_\lambda x^{z-1} dx, \qquad (\lambda=1, 2, \ldots, p)$$

der Fall. Durch p von einander linear unabhängige Functionen mit den in § 10 unter I., II., III. erwähnten Eigenschaften kann aber, auf Grund des § 12, jede andere Function mit denselben Eigenschaften als homogene lineare Function ausgedrückt werden. Bei passender Bestimmung der Constanten $B_1, \ldots, B_p$ ist demnach

$$(80)\quad \int\limits_0^\infty y x^{z-1} dx = \int\limits_0^1 y x^{z-1} dx + \int\limits_1^\infty y x^{z-1} dx = B_1\int\limits_0^\infty y_1 x^{z-1} dx + \ldots + B_p\int\limits_0^\infty y_p x^{z-1} dx$$

$$= B_1\int\limits_0^1 y_1 x^{z-1} dx + \ldots + B_p\int\limits_0^1 y_p x^{z-1} dx + B_1\int\limits_1^x y_1 x^{z-1} dx + \ldots$$

$$\ldots + B_p\int\limits_1^x y_p x^{z-1} dx.$$

Aus der allgemeinen Form (77) der Integrale der Differentialgleichung (56) in der Umgebung der Stelle $x = 0$ ergiebt sich für jedes der

zwischen den Grenzen 0 und 1 genommenen Integrale ein Ausdruck der Form

$$\int_0^1 y_\lambda x^{z-1}dx = P_\lambda(z) = \sum_\rho \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{C_0}{z+\rho+\nu} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{(z+\rho+\nu)^n}\right). \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, p)$$

Die zwischen den Grenzen 1 und ∞ genommenen Integrale sind offenbar ganze Functionen. Aus Gleichung (80) folgt also, dass der Ausdruck $P(z) - B_1P_1(z) - \ldots - B_pP_p(z)$ auch eine ganze Function sein muss, was offenbar nur dadurch möglich ist, dass dieser Ausdruck identisch verschwindet. Nun sieht man aber unmittelbar ein, dass die Partialbruchreihen $P, P_1, \ldots, P_p$ dann und nur dann von einander linear unabhängig sind, wenn die Integrale $y, y_1, \ldots, y_p$ von einander linear unabhängig sind. Auf Grund der Gleichung $P - B_1P_1 - \ldots - B_pP_p = 0$ ist also $y = c_1y_1 + \ldots + c_py_p$. Hiermit ist aber der obige Satz bewiesen.

Helsingfors, April 1890.

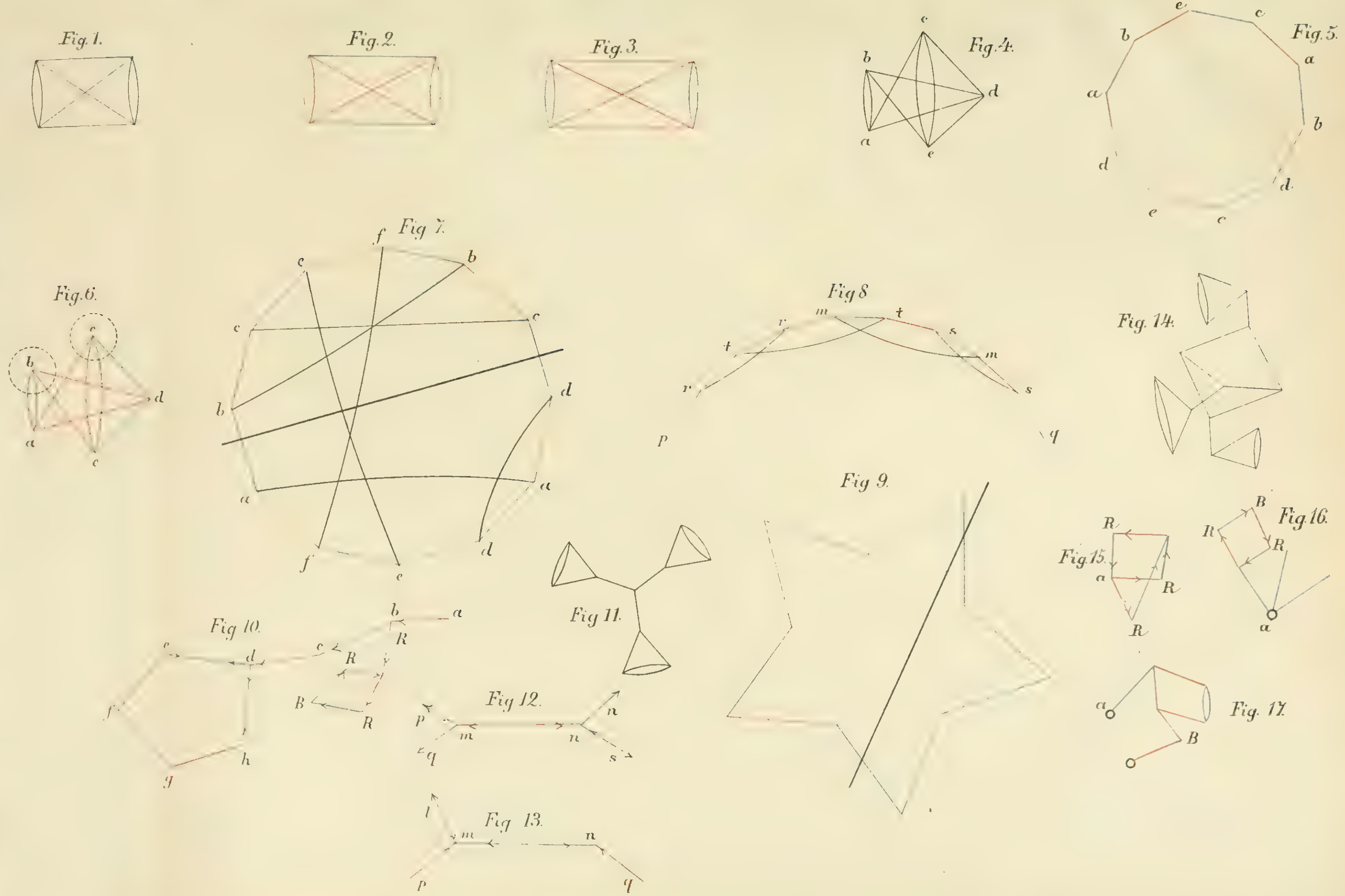


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig 7.
Fig 8
Fig 9.
Fig 10.
Fig 11.
Fig 12.
Fig 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.